21 世纪数学系列教材

模糊数学方法及其应用

第三版

谢季坚 刘承平

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

- 强调"数学概念、方法"，重视"应用技术、模型"
- 严谨、适度地阐述基本原理，通俗、直观地介绍背景知识
- 联系实际，突出应用，典型实例结合软件计算
- 反复锤炼，精益求精，特点鲜明，多年长销不衰

责任编辑 /徐正达
封面设计 /刘 卉

21世纪数学系列教材

- 微积分
- 工科数学分析（上、下）（第二版）
- 线性代数教程
- 概率论与数理统计（第二版）
- 经济管理数学（第二版）
- 数值分析（第4版）
- 数值分析简明教程
- 运筹学的原理和方法（第二版）
- 数学物理方法（第二版）
- 大学数学（文科）
- 高等数学（大专）（第三版）
- 实用计算方法
- 模糊数学方法及其应用（第三版）

ISBN 7-5609-3795-0
9 787560 937953 >
定价：22.80元

21 世纪数学系列教材

模糊数学方法及其应用

第三版

谢季坚　刘承平

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学方法及其应用　第三版/谢季坚　刘承平
武汉:华中科技大学出版社,2006年8月
ISBN 7-5609-3795-0

Ⅰ.模…
Ⅱ.①谢…　②刘…
Ⅲ.模糊数学-方法-应用
Ⅳ.O159

模糊数学方法及其应用　第三版　　谢季坚　刘承平

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960　1/16　印张:16.25　字数:280 000
版次:2006年8月第3版　印次:2006年8月第10次印刷　定价:22.80元
ISBN 7-5609-3795-0/O·393

内 容 简 介

本书讲述了模糊数学方法及其应用，主要内容包括模糊集合及其运算、模糊统计方法、模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊决策（含层次分析法）、模糊线性规划、模糊控制以及它们在科学技术与经济管理中的应用等.

本书的编写兼顾了“数学概念、方法”与“应用技术、模型”两个方面，本书的特点是具有较好的通俗性、应用性和可操作性.

本书可作为大学本科生、研究生的教材或参考书，也可供广大科技工作者使用.

第三版前言

本书第二版自2000年出版以来,印刷多次,受到读者的欢迎. 根据读者的建议和社会需求,这次修订工作增加了层次分析法(4.4.4节)、模糊控制(第6章)和模糊聚类分析及本书中部分算法的MATLAB源程序(附录B)等内容,同时更新了一些模糊数学联系实际的例子. 编者在引用这些公开发表的论文时作了适当的加工处理,并注明了论文的出处,在此向论文的作者致谢.

本书具有如下特点:

1. 通俗性强. 在编写时注重问题的实际背景与概念的直观描述,解释多于推导,逻辑推理做到适可而止,行文流畅,通俗易懂.

2. 应用性强. 讲求实效,注重理论联系实际,特别是模糊数学理论在科学技术和经济管理中的应用.

3. 可操作性强. 当对每个数学模型有了初步了解时,参照一个实际应用例子,就可以联系实际去操作了,方法明确,步骤具体.

本书中所有的计算机程序均由编者本人在普通计算机上运行通过,其中MATLAB程序使用的是MATLAB6.5软件包,lindo程序使用的是lindo6.0注册版,lingo程序使用的是lingo8.0注册版.

本书第三版仍由谢季坚主编,谢季坚教授编写第1、2、3、4章,刘承平副教授编写第5、6章,4.4.4节及附录B,最后由谢季坚教授整合、统稿.

本书的出版,得到华中科技大学出版社的热心支持和大力帮助,在此表示衷心的感谢.

由于作者水平所限,书中难免存在缺点和错误,恳请读者批评指正.

编　者

2005年12月于武汉

第二版前言

本书是作者在为研究生编写的《农业科学中的模糊数学方法》(华中理工大学出版社,1993年版)的基础上,结合多年的教学与科研工作实践修订而成的.之所以更名为《模糊数学方法及其应用》是为了兼顾"数学概念、方法"与"应用技术、模型"这两个方面,这也正是本书的特点.

作者在编写本书时,注重模糊数学概念与定理的直观描述,以启迪学生的思维;对模糊数学方法在科学技术与经济管理中的应用,给予了特别关注.每一章都有一节专门讲授模糊数学方法应用的内容,以培养学生应用数学的能力.全书叙述简明流畅,方法与过程思路清晰,步骤具体,可操作性强.

本书由谢季坚主编.谢季坚教授负责编写前4章,刘承平副教授负责编写第5章并开发了与本书配套使用的"模糊数学模型CAC"应用软件,为学习提供了很大方便.

在本书出版的时候,我们要感谢华中农业大学副校长邓秀新教授、李忠云教授以及研究生处、教务处、基础课部所给予的支持与帮助,还要感谢华中理工大学出版社的领导和编辑为本书出版所付出的辛勤劳动.

由于作者水平所限,书中一定存在不少缺点与错误,恳请读者批评指正.

编　者

1999国庆50周年于

武汉

目　　录

第1章　模糊集的基本概念

模糊集(也称为模糊集合)是模糊数学的基础,模糊数学则是研究和处理模糊性现象的数学方法.本章着重介绍模糊集的基本概念、运算法则、基本定理及其简单的应用.

1.1　模糊数学概述

1965年,美国加利福尼亚大学控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授在《信息与控制》杂志上发表了一篇开创性论文《模糊集合》[1],这标志着模糊数学的诞生.扎德是世界公认的系统理论及其应用领域最有贡献的人之一,被誉为"模糊集之父"[2,3].

与其他学科一样,模糊数学也是因实践的需要而产生的.在日常生活中,模糊概念(或现象)处处存在,例如厚、薄,快、慢,大、小,长、短,轻、重,高、低,稀、稠,贵、贱,强、弱,软、硬,锐、钝,深、浅,美、丑,白天、黑夜,早晨、中午、傍晚,黎明、黄昏,多云、晴天、阴天、雨天,中雨、暴雨、大暴雨等.在科学技术、经济管理领域中,模糊概念(或现象)也无处不在,例如感冒、胃病、心脏病,红壤、黄壤、棕壤,蔬菜、水果,动物、植物、微生物,通货膨胀、经济繁荣、经济萧条,失业、就业,劳动密集型企业、知识密集型企业,信得过产品、合格品、次品,贫困、温饱、小康、富有等.当代科技发展的趋势之一,就是各个学科领域都要求定量化、数学化.当然也迫切要求将模糊概念(或现象)定量化、数学化,这就促使人们必须寻找一种研究和处理模糊概念(或现象)的数学方法.

众所周知,经典数学是以精确性为特征的.然而,与精确性相悖的模糊性并不完全是消极的、没有价值的.甚至可以这样说,有时模糊性比精确性还要好.例如,要你去迎接一个"大胡子、高个子、长头发、戴宽边黑色眼镜的中年男人",尽管这里只提供了一个精确信息——男人,而其他信息——大胡子、高个子、长头发、宽边黑色眼镜、中年等都是模糊概念,但是,你将这些模糊概念经过头脑的综合分析判断,就可以找到这个人.如果这个问题用计算机精确地处理,那么就要求将此人的准确年龄与身高,胡子、头发的准确长度与根数,眼镜的边宽厘米数、黑色的程度等一一输入计算机,才可以找到这个人.如果这个人的头发中途掉了一根的话,计算机就可能找不到这个人了.由此可见,有时太精确了未必一定是好事.

模糊数学绝不是把数学变成模模糊糊的东西,它也具有数学的共性:条理分

明，一丝不苟，即使描述模糊概念(或现象)，也会描述得清清楚楚. 由扎德教授创立的模糊数学是继经典数学、统计数学之后数学的一个新的发展方向. 统计数学将数学的应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域，模糊数学则把数学的应用范围从精确现象领域扩大到模糊现象领域.

在人类社会和各个科学领域中，人们所遇到的各种量大体上可以分成两大类：确定性的与不确定性的，而不确定性又可分为随机性和模糊性. 人们正是用三种数学来分别研究客观世界中不同的量[4]，即

量
- 确定性——经典数学
- 不确定性
  - 随机性——随机数学
  - 模糊性——模糊数学

在这种框架内，数学模型也可以分为三大类.

第一类是确定性数学模型. 这类模型研究的对象具有确定性，对象之间具有必然的关系，最典型的就是用微分法、微分方程、差分方程所建立的数学模型.

第二类是随机性数学模型. 这类模型研究的对象具有随机性，对象之间具有偶然的关系，如用概率分布方法、马尔可夫(Markov)链所建立的数学模型.

第三类是模糊性数学模型. 这类模型所研究的对象与对象之间的关系具有模糊性. 这就是本书所要讨论的模型.

为了弄清两种不确定性，下面介绍两种不确定性之间的区别.

随机性的不确定性，也就是概率的不确定性. 例如，“明天有雨”、“掷一骰子出现 6 点”等，它们的发生是一种偶然现象，具有不确定性. 在这里，事件本身是确定的，而事件的发生不确定. 只要时间过去，到了明天，“明天有雨”是否发生就变成确定的了. “掷一骰子出现 6 点”，只要实际做一次实验，它就变成确定的了. 而模糊性的不确定性，即使时间过去了，或者实际做了一次实验，它们仍然是不确定的. 这主要是因为事件本身(如“青年人”、“高个子”等)是不确定的，具有模糊性，是由概念、语言的模糊性产生的.

模糊数学从诞生至今，已经四十多年了. 早在 1978 年，国际上第一本以模糊数学为主题的学术刊物《Fuzzy Sets and Systems》在欧洲创刊. 模糊数学自 1976 年传入我国后得到了迅速发展：1980 年成立了中国模糊数学与模糊系统学会，1981 年创办了《模糊数学》(武汉，华中工学院)杂志，1987 年创办了《模糊系统与数学》(长沙，国防科技大学)杂志. 我国已经成为模糊数学研究的四大中心(美国、西欧、日本、中国)之一. 北京师范大学汪培庄、四川大学刘应明等教授对模糊数学的研究取得了显著成绩.

模糊数学在实际中的应用几乎涉及国民经济的各个领域，尤其在科学技术、经济管理、社会科学方面得到了广泛而又成功的应用. 比如，在生物学发展史上，由于科学技术的不断进步，人们发现在动物与植物之间存在着“中介状态”，于是又分出

一类微生物.即使将生物分成三类后,又发现还存在着"中介状态",于是又有人主张将生物分为五类、六类.这一现象用模糊集合就可得到合理的解释.再如,对某个领域的经济发展水平的评价,往往划分为富裕型、小康型、温饱型、贫困型,这些都是模糊的,只有通过模糊数学模型才能得到合乎实际的评价.

特别值得一提的是,模糊理论在智能计算机的开发与应用上起到了重要作用.20世纪80年代以来,空调器、电冰箱、洗衣机、洗碗机等家用电器中已广泛采用了模糊控制技术.日本在这方面已走在世界前列,我国也于20世纪90年代初在杭州生产了第一台模糊控制洗衣机.由此看来,模糊数学已逐步进入寻常百姓家了.

1.2　模糊理论的数学基础

1.2.1　经典集合

1. 集合及其表示

集合是现代数学的一个基础概念.一些不同对象的全体称为集合,简称为集,常用大写英文字母 A,B,X,Y 等表示.本书有时称集合为经典集合,这是为了区别于模糊集合.集合内的每个对象称为集合的元素,常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示."a 属于 A"记为 $a\in A$,"a 不属于 A"记为 $a\notin A$.

不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

只含有限个元素的集合,称为有限集,有限集所含元素的个数称为集合的基数.包含无限个元素的集合称为无限集.以集合作为元素所组成的集合称为集合族.所谓论域是指所论及对象的全体,它也是一个集合,也称为全集,常用大写英文字母 X,Y,U,V 等表示.

集合的表示法主要有两种:

1° 枚举法　如由20以内的质数组成的集合可表示为

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\},$$

自然数集可表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

2° 描述法　使 $P(x)$ 成立的一切 x 组成的集合可表示为 $\{x\mid P(x)\}$.如实数集可表示为 $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,简记为 $\mathbf{R}$;$B=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 实际上是由元素 -1 与 1 组成的集合.

经典集合具有两条最基本的属性:元素彼此相异,范围边界分明.一个元素 x 与集合 A 的关系是,要么 x 属于 A,要么 x 不属于 A,二者必居其一.

例如,设论域 $U=\{$某班学生$\}$,把某班男生组成的集合记为 A,即 $A=\{$男生$\}$.那么,这个班的每个学生之间彼此不相同,而且可以判明每个学生是否属于 A.如果以

某班“高个子”学生为元素，就不能组成一个经典集合，因为“高个子”无分明界限.

2. 集合的包含

集合的包含概念是集合之间的一种重要关系.

定义1.2.1　设有集合A和B，若集合A的每个元素都属于集合B，即$x\in A\Longrightarrow x\in B$，则称$A$是$B$的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，读作“$A$包含于$B$中”或“$B$包含$A$”.

显然$A\subseteq A$. 空集$\varnothing$是任何集合A的子集，即$\varnothing\subseteq A$. 若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$.

定义1.2.2　设有集合A和B，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称集合A与集合B相等，记为$A=B$.

定义1.2.3　设有集合U，对于任意集合A，总有$A\subseteq U$，则称U为全集.

全集是个具有相对性的概念. 例如，实数集对于整数集、有理数集而言是全集，而整数集对于偶数集、奇数集而言是全集.

定义1.2.4　设有集合A，A的所有子集所组成的集合称为A的幂集，记为$\mathscr{T}(A)$，即$\mathscr{T}(A)=\{B|B\subseteq A\}$.

例1.2.1　设$A=\{a,b\}$，则A的幂集为$\mathscr{T}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

由定义1.2.4知，幂集是集合族.

3. 集合的运算

定义1.2.5　设$A,B\in\mathscr{T}(U)$，U是论域，规定：

$A\cup B\xlongequal{\text{def}}\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为A与B的并集；

$A\cap B\xlongequal{\text{def}}\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为A与B的交集；

$A^C\xlongequal{\text{def}}\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$，称为A的余集*.

4. 集合运算(并、交、余)的性质

定理1.2.1　设$A,B,C\in\mathscr{T}(U)$，U是论域，则有：

1° 幂等律　$A\cup A=A$，　$A\cap A=A$；

2° 交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

3° 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

4° 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，　$A\cap(A\cup B)=A$；

5° 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

6° 0-1律　$A\cup U=U$，$A\cap U=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

7° 还原律　$(A^C)^C=A$；

8° 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$；

9° 排中律　$A\cup A^C=U$，　$A\cap A^C=\varnothing$.

这些性质均可由并、交、余的定义直接推出. 上述两个集合的并、交运算可推广

---

* 国家标准规定A的余集用$\complement A$表示，为了与大多数教材呼应，本书仍用A^C表示.

到任意多个集合的并、交运算.

5. 集合的直积

在日常生活中,有许多事物是成对出现的,且具有一定的顺序,例如上、下,左、右,平面上点的坐标等.任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x,y),称为 x 与 y 的序对.有序是指当 $x\neq y$ 时,$(x,y)\neq(y,x)$,$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x',y=y'$.

定义1.2.6 设 X,Y 是两个集合,由 X 的元素与 Y 的元素配成的全体序对组成一个集合,称为 X 与 Y 的直积(或笛卡儿(Descartes)积),记为 $X\times Y$,即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}.$$

例1.2.2 设 $X=\{1,2\}$,$Y=\{0,2\}$,则

$$X\times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\},$$
$$Y\times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

一般地,$X\times Y\neq Y\times X$.

1.2.2 映射与扩张

1. 映射

定义1.2.7 设 X 与 Y 是两个非空集,如果存在一个对应规则 f,使得对于任一元素 $x\in X$,有唯一元素 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的映射,记为

$$f:X\to Y,$$
$$x\mapsto f(x)=y\in Y.$$

y 称为 x 在映射 f 下的像,x 称为原像.

集 X 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$.集

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$.一般地,$f(X)\subseteq Y$.若 $f(X)=Y$,则称 f 是从 X 到 Y 上的映射或从 X 到 Y 的满映射.

映射概念是函数概念的推广.微积分中定义在区间 $[a,b]\subseteq\mathbf{R}$ 上的一元函数 $f(x)$,就是从 $[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射,即

$$f:[a,b]\to\mathbf{R},$$
$$x\mapsto f(x)=y.$$

定义1.2.8 如果映射 $f:X\to Y$,$\forall x_1,x_2\in X$,成立 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 的1—1 映射.如果 $f:X\to Y$ 是1—1 的满映射,则称 f 为从 X 到 Y 的1—1 对应.

例1.2.3 设映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=\sin x$,则 f 不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的满映射,而是 $\mathbf{R}$ 到区间 $[-1,1]$ 的满映射.

例1.2.4 设 $C[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数集.定义 $C[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 上的一个映射

$$f: \varphi(x) \to \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi(x) \in C[a,b].$$

这是一个满映射,但不是1—1映射.

例 1.2.5 设 $X=\{a,b,c,d\}$,$Y=\{1,2,3,4\}$,f 是从 X 到 Y 的映射,$f=\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,2)\}$,则 f 是满映射,又是1—1映射,所以 f 是1—1对应.

2. 集合的特征函数

定义 1.2.9 设 $A\in\mathscr{T}(U)$,U 是论域,具有如下性质的映射

$$\chi_A: U\to\{0,1\},$$

$$x\mapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

$\chi_A(x)$称为集合 A 的特征函数(图1.1).

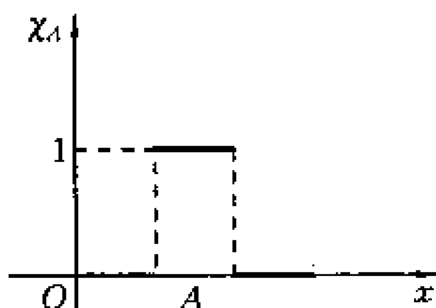


图1.1

由定义1.2.9可知,集合 A 由特征函数$\chi_A(x)$唯一确定.例如,论域 U 为实数集,则集合

$$A=\{x \mid |x|\leqslant 1\}$$

的特征函数为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

请读者画出此特征函数的图形.

由此看出,特征函数与集合是互相决定的,是一个事物从不同角度给出的描述.下面是特征函数与集合之间的几个基本关系:

1° $A=U\Leftrightarrow\chi_A(x)=1$,$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)=0$;

2° $A\subseteq B\in\mathscr{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

3° $A=B\in\mathscr{T}(U)\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$.

基本关系3°表明,U 的任一子集 A 完全由它的特征函数确定.

特征函数还具有下列运算性质:

$$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee\chi_B(x), \quad \chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge\chi_B(x),$$
$$\chi_{A^c}(x)=1-\chi_A(x).$$

此处"∨"、"∧"分别是取大、取小运算,即

$$a\vee b=\max(a,b), \quad a\wedge b=\min(a,b).$$

上述性质表明,应用特征函数同样可以方便地讨论集合间的关系和运算.

3. 映射的扩张

上述映射概念实际上是把点 x 映射为点 $y=f(x)$,但在实际中往往需要将点映射为集合(图1.2).

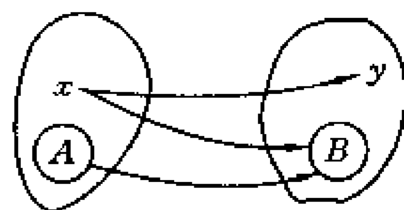


图1.2

定义 1.2.10 设 $f:X\to Y$,$x\mapsto f(x)$,则称映射

$$f: X\to\mathscr{T}(Y),$$
$$x\mapsto f(x)=B\in\mathscr{T}(Y)$$

为 X 到 Y 的点-集映射.

定义1.2.11　设 $T: X\to Y, x\mapsto f(x)$，则称映射

$$T: \mathscr{T}(X)\to \mathscr{T}(Y),$$
$$A\mapsto T(A)$$

为 X 到 Y 的集合变换.

例1.2.6　设 $X=\{a,b\}, Y=\{1,2,3\}$，则 $\mathscr{T}(X)=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}, \mathscr{T}(Y)=\{\varnothing, Y, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$.

令 $f: X\to\mathscr{T}(Y), a\mapsto\{1\}, b\mapsto\{2,3\}$,

$T: \mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y), \varnothing\mapsto\varnothing, \{a\}\mapsto\{1,2\}, \{b\}\mapsto\{1\}, X\mapsto Y$,

则 f 是 X 到 Y 的点-集映射，而 T 是 X 到 Y 的集合变换.

定义1.2.12(经典扩张原理)　设映射 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)=y$. $\forall A\in\mathscr{T}(X)$，令

$$f(A)=\{y\in Y\mid y=f(x), x\in A\},$$

则集合 $f(A)\in\mathscr{T}(Y)$ 称为集 A 在 f 下的像；$\forall B\in\mathscr{T}(Y)$，令

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\},$$

则集合 $f^{-1}(B)\in\mathscr{T}(X)$ 称为集 B 在 f 下的原像(图1.3).

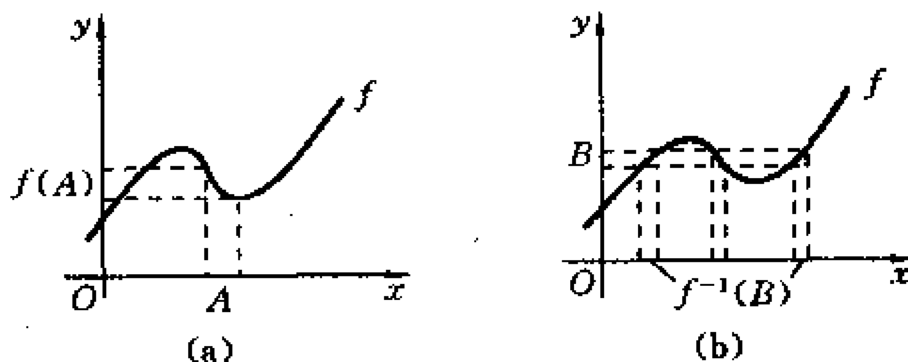


图1.3

于是，映射 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)=y$ 诱导出映射

$$f: \mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y),$$
$$A\mapsto f(A)\in\mathscr{T}(Y),$$
$$f^{-1}: \mathscr{T}(Y)\to\mathscr{T}(X),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)\in\mathscr{T}(X).$$

其特征函数分别为

$$\chi_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\chi_A(x),\quad \chi_{f^{-1}(B)}(x)=\chi_B(f(x)).$$

这就是扩张原理，它实际上是一个定义.

例1.2.7　设 $X=\{1,2\}, Y=\{1,3,4\}$，映射 $f: X\to Y$ 定义为 $f(x)=x^2$，则

$$\mathscr{T}(X)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, X\},$$
$$\mathscr{T}(Y)=\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, Y\}.$$

在映射 f 下的扩张原理为

$$f:\mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y),$$
$$A\mapsto f(A)=\{y\mid y=f(x)=x^2,x\in A\}.$$

例如
$$\{x\}\mapsto f(\{x\})=\{y\mid y=f(x)=x^2,x\in\{x\}\}=\{f(x)\}=\{x^2\},$$
$$f(\varnothing)=\varnothing,\quad f(\{1\})=\{f(1)\}=\{1\},$$
$$f(\{2\})=\{f(2)\}=\{4\},\quad f(X)=\{f(1),f(2)\}=\{1,4\}\in\mathscr{T}(Y);$$
$$f^{-1}:\mathscr{T}(Y)\to\mathscr{T}(X),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)=\{x\mid x=f^{-1}(y)=\sqrt{y},y\in B\},$$
$$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\quad f^{-1}(\{1\})=\{f^{-1}(1)\}=\{1\},$$
$$f^{-1}(\{4\})=\{f^{-1}(4)\}=\{2\},\quad f^{-1}(\{1,4\})=\{1,2\}=X.$$

但 $f^{-1}(\{3\}),f^{-1}(\{3,4\}),f^{-1}(\{1,3\}),f^{-1}(Y)$在 f 下没有原像.因此,当 $B=\{3\}$, $\{1,3\},\{3,4\},Y$ 时,f^{-1}均不是 B 到$f^{-1}(B)$的映射.

1.2.3 二元关系

1. 二元关系的概念

关系是一个基本概念.在日常生活中有“朋友关系”、“师生关系”等,在数学上有“大于关系”、“等于关系”等,而序对又可以表达两个对象之间的关系.于是,引进下面的定义.

定义 1.2.13 设 $X,Y\in\mathscr{T}(U)$,$X\times Y$ 的子集 R 称为 X 到 Y 的二元关系,特别地,当 $X=Y$ 时,称之为 X 上的二元关系.以后把二元关系简称为关系.

若 $(x,y)\in R$,则称 x 与 y 有关系 R,记为 xRy;若 $(x,y)\notin R$,则称 x 与 y 没有关系 R,记为 $x\overline{R}y$. R 的特征函数为

$$\chi_R(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } xRy \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\overline{R}y \text{ 时}.\end{cases}$$

例 1.2.8 设 $X=\{1,4,7,8\}$,$Y=\{2,3,6\}$,定义关系 $R\Leftrightarrow x<y$,称 R 为“小于”关系.于是

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\}.$$

这表明“小于”关系 R 是直积 $X\times Y$ 的子集.

例 1.2.9 设 $X=\mathbf{R}$,则子集

$$R=\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R},y=x\}$$

是 $\mathbf{R}$ 上元素间的“相等”关系.

关系的性质主要有自反性、对称性和传递性.

定义 1.2.14 设 R 是 X 上的关系.

1° 若 $\forall x\in X$,有 xRx,即 $\chi_R(x,x)=1$,则称 R 是自反的.

2° $\forall x,y\in X$，若 $xRy\Longrightarrow yRx$，即 $\chi_R(x,y)=\chi_R(y,x)$，则称 R 是对称的.

3° $\forall x,y,z\in X$，若 $xRy,yRz\Longrightarrow xRz$，即 $\chi_R(x,y)=1,\chi_R(y,z)=1\Longrightarrow\chi_R(x,z)=1$，则称 R 是传递的.

例1.2.10 设N为自然数集，N上的关系"$<$"具有传递性，但不具有自反性和对称性.

例1.2.11 设 $\mathscr{T}(X)$ 为 X 的幂集，$\mathscr{T}(X)$ 上的关系"$\subseteq$"具有自反性和传递性，但不具有对称性.

2. 关系的矩阵表示法

关系的表示方法很多，除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为方便.

定义1.2.15 设两个有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，R 是 X 到 Y 的二元关系，即

R	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

，其中 $r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } x_iRy_j,\\ 0, & \text{当 } x_i\overline{R}y_j.\end{cases}$

称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 为 R 的关系矩阵，记为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix}.$$

由定义1.2.15可知，关系矩阵中的元素或是0或是1. 在数学上把诸元素只是0或1的矩阵称为布尔(Boole)矩阵. 因此，任何关系矩阵都是布尔矩阵.

例1.2.12 例1.2.8中"$<$"关系 R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 关系的合成

通俗地讲，若"兄妹"关系记为 R_1，"母子"关系记为 R_2，即 x 与 y 有"兄妹"关系 xR_1y，y 与 z 有"母子"关系 yR_2z，那么 x 与 z 有"舅甥"关系. 这就是关系 R_1 与 R_2 的合成，记为 $R_1\circ R_2$.

定义1.2.16 设 R_1 是 X 到 Y 的关系，R_2 是 Y 到 Z 的关系，则称 $R_1\circ R_2$ 为关系 R_1 与 R_2 的合成，表示为

$$R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid\exists\ y\in Y,\text{使}(x,y)\in R_1,(y,z)\in R_2\}.$$

$R_1 \circ R_2$ 是直积 $X\times Z$ 的一个子集，其特征函数为

$$\chi_{R_1 \circ R_2}(x,z) \xlongequal{\text{def}} \bigvee_{y\in Y}[\chi_{R_1}(x,y) \wedge \chi_{R_2}(y,z)].$$

例1.2.13 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{2,3,4\}$，$Z=\{1,2,3\}$，R_1 是 X 到 Y 的关系，R_2 是 Y 到 Z 的关系，即

$$R_1 = \{(x,y)\mid x+y=6\} = \{(2,4),(3,3),(4,2)\},$$
$$R_2 = \{(y,z)\mid y-z=1\} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\},$$

则 R_1 与 R_2 的合成

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,z)\mid x+z=5\} = \{(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

关系的合成也可以用矩阵来表示.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}$，X 到 Y 的关系 R_1 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1=(r_{ij})_{m\times n}$，$Y$ 到 Z 的关系 R_2 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2=(p_{ij})_{n\times s}$，则 X 到 Z 的关系 $R_1\circ R_2$ 的关系矩阵

$$\boldsymbol{R}_1 \circ \boldsymbol{R}_2=(c_{ij})_{m\times s},$$

其中
$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge p_{kj}), \quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s.$$

下面将例1.2.13用关系矩阵来表示.设

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{R}_1 \circ \boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

这就是例1.2.13的矩阵表示式.

4. 等价关系 · 划分

为了将集合的元素进行分类，下面引进一个重要的关系——等价关系.

定义1.2.17 若集合 X 上的二元关系 R 具有自反性、对称性和传递性，则称 R 是 X 上的等价关系，此时 xRy 又称为 x 等价于 y，记为 $x\simeq y$.

比如，年龄相同是等价关系，数学上的"＝"也是等价关系；但同学关系不是等价关系，因为它不具有传递性.

集合 X 上等价关系的重要性在于可以将集合 X 分成适当的子集(实际上就是将集合 X 进行分类)，为此又引进下面的定义.

定义1.2.18 设 X 是非空集，X_i 是 X 的非空子集，若 $\bigcup_i X_i=X$，且 $X_i\cap X_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，则称集合族 $\{\cdots X_i\cdots\}$ 为 X 的一个划分，称集 X_i 为这个划分的一个类. 以 Π

表示为

$$\Pi = \{X_i | X_i \subseteq X, 且\ \forall x \in X\ 恰属于一个\ X_i\}.$$

划分Π的每个元素都称为一个块,也称为划分的一个类.

当划分的块数为有限时,划分Π可表示为

$$\Pi = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \quad n\ 为块数.$$

显然,对有限集而言,它的划分块数一定是有限的.

例1.2.14 设$X=\{1,2,3,4\}$,则$\Pi_1=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$,$\Pi_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$,$\Pi_3=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$,$\Pi_4=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$,$\Pi_5=\{\{1,2,3,4\}\}$等都是$X$的划分,但$\Pi'=\{\{1\},\{2,3\}\}$,$\Pi''=\{\{1\},\{2,3\},\{2,4\}\}$等不是$X$的划分.

集合X上的等价关系与X的划分有密切联系.为了阐明这种联系,先引进等价类的概念,再叙述一个结论(定理1.2.2),不予证明.

定义1.2.19 设R是集合X上的等价关系,对于X中的每个元素x,与x等价的元素所成的集合称为由x生成的等价类,记为$[x]_R$,即

$$[x]_R \xlongequal{\text{def}} \{y | y \in X, y \simeq x\}.$$

显然,等价类$[x]_R$满足:

1° $X=\bigcup[x]_R$;　　　2° $[x]_R \neq [z]_R \Longrightarrow [x_R] \cap [z]_R = \varnothing$.

例1.2.15 设论域$X=\{1,2,3,\cdots,30,31\}$(某月的天数),在X上建立模7的同余关系R:对$a,b\in X$,有$7|a-b$,记为$a=b(\text{mod}7)$,它表示正整数a,b分别用7去除,所得的余数相同.由同余性质可知,同余关系R是X上的等价关系,则由X中的元素生成的等价类为

$$[0]_R = \{7,14,21,28\}, \quad [1]_R = \{1,8,15,22,29\},$$
$$[2]_R = \{2,9,16,23,30\}, \quad [3]_R = \{3,10,17,24,31\},$$
$$[4]_R = \{4,11,18,25\}, \quad [5]_R = \{5,12,19,26\},$$
$$[6]_R = \{6,13,20,27\}.$$

根据上述等价类可以制作2008年12月的日历,如表1.1所示.

表1.1

日	一	二	三	四	五	六
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

下面的定理说明了集合X上的等价关系与划分(即分类)之间的联系.

定理1.2.2 集合X上的任一等价关系可以确定X的一个划分(即分类);反过来,集合X的任一划分(即分类)可以确定X上的一个等价关系.

下面举例说明.

例 1.2.16 设论域 $X=\{$某高校全体本科生(四年制)$\}$,在 X 上定义关系 $R_1=$"同年级",显然"同年级"关系是一个等价关系. 因此,关系 R_1 把 X 划分为四个不同年级,即

$$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\},$$

其中 X_i 表示 i 年级,$i=1,2,3,4$. 这就表明,论域 X 上的等价关系 R_1(同年级)可以确定一个划分(分类):

$$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}.$$

例 1.2.17 设论域 $X=\{$某高校学生$\}$,在 X 上有一个划分(分类)

$$X=\{\text{男生},\text{女生}\}=\{Y_1,Y_2\},$$

因为这个划分(分类)是按性别划分的,所以这个划分(分类)可以确定 X 上的一个关系 $R_2=$"同性别",显然,"同性别"关系 R_2 也是一个等价关系.

5. 相似关系

与等价关系一样,相似关系的应用也是非常广泛的.

定义 1.2.20 设 R 是集合 X 上的关系,若 R 是自反的、对称的,则称 R 是相似关系.

例如,朋友关系、同学关系都是相似关系.

例 1.2.18 设 $X=\{1244,157,287,456,690\}$,定义在 X 上的关系 $R=\{(x,y)\mid x,y\in X,x$ 与 y 有相同的数字$\}$,则 R 为相似关系,其相似矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

定义 1.2.21 设 $\underline{R}$ 是集合 X 上的相似关系,若 $C\subseteq X$,$\forall x,y\in C$,有 $x\,\underline{R}y$,则称 C 是由相似关系 $\underline{R}$ 产生的相似类,记为 $[x]_{\underline{R}}$,即

$$[x]_{\underline{R}}=\{y\mid x,y\in C,x\,\underline{R}y\}.$$

显然满足:$X=\bigcup[x]_{\underline{R}}$,但 $[x]_{\underline{R}}\neq[z]_{\underline{R}}$ 时,$[x]_{\underline{R}}\cap[z]_{\underline{R}}\neq\varnothing$,这是因为不满足传递性.

例 1.2.19 在例 1.2.18 中相似关系 R 产生的相似类为 $\{1244,157,287\}$,$\{1244,157,456\}$,$\{456,690\}$.

易知 $X=\{1244,157,287\}\cup\{456,690\}$.

1.2.4 格

1. 格的概念

定义 1.2.22 设在集合 L 中规定了两种运算"$\vee$"与"$\wedge$",即 $a\vee b=\sup\{a,b\}$,

$a \wedge b = \inf\{a, b\}$，并满足下列运算性质：

幂等律　$a \vee a = a, a \wedge a = a$，

交换律　$a \vee b = b \vee a$，　$a \wedge b = b \wedge a$，

结合律　$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$，　$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$，

吸收律　$(a \vee b) \wedge a = a$，　$(a \wedge b) \vee a = a$，

则称 L 是一个格，记为 $(L, \vee, \wedge)$.

定义 1.2.23　设 $(L, \vee, \wedge)$ 是一个格.

若 $(L, \vee, \wedge)$ 还满足：

分配律　$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$，　$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$，

则称 $(L, \vee, \wedge)$ 为分配格.

若 $(L, \vee, \wedge)$ 还满足：

0-1 律　在 L 中存在两个元素 0 与 1，且

$$a \vee 0 = a, \quad a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 1 = a,$$

则称 $(L, \vee, \wedge)$ 有最小元 0 与最大元 1，此时又称 $(L, \vee, \wedge)$ 为完全格.

若在具有最小元 0 与最大元 1 的分配格 $(L, \vee, \wedge)$ 中规定一种余运算 ^{C}，满足：

复原律　$(a^C)^C = a$，

互余律　$a \vee a^C = 1, a \wedge a^C = 0$，则称 $(L, \vee, \wedge, ^C)$ 为一个布尔代数.

若在具有最小元 0 与最大元 1 的分配格 $(L, \vee, \wedge)$ 中规定一种余运算 ^{C}，满足：

复原律　$(a^C)^C = a$，

对偶律　$(a \vee b)^C = a^C \wedge b^C$，　$(a \wedge b)^C = a^C \vee b^C$，

则称 $(L, \vee, \wedge, ^C)$ 为一个软代数.

例 1.2.20　任一集合 A 的幂集 $\mathscr{T}(A)$ 是一个完全格，格中的最大元为 A（全集），最小元为 $\varnothing$（空集）.

例 1.2.21　记 $(0,1)$ 内的有理数集为 $\mathbf{Q}$，在 $\mathbf{Q}$ 上定义有理数的大小关系"$\leqslant$"，则 $(\mathbf{Q}, \leqslant)$ 是一个格，但不是完全格.

2. 扎德算子 $(\vee, \wedge)$

定义 1.2.24　$\forall a, b \in [0,1]$，定义

$$a \vee b \xlongequal{\text{def}} \max(a, b), \quad a \wedge b \xlongequal{\text{def}} \min(a, b),$$

称 $\vee, \wedge$ 为扎德算子.

本书中再出现符号"$\vee$"与"$\wedge$"，都为扎德算子，分别表示取大、取小的意思.

定理 1.2.3　设 $\forall a, b, c \in [0,1]$，扎德算子 $\vee, \wedge$ 具有如下性质：

1° 幂等律　$a \vee a = a$，　$a \wedge a = a$；

2° 交换律　$a \vee b = b \vee a$，　$a \wedge b = b \wedge a$；

3° 结合律　$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$，　$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$；

4° 吸收律 $(a\vee b)\wedge a=a$, $(a\wedge b)\vee a=a$;

5° 分配律 $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$, $(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$;

6° 0-1 律 $a\vee 0=a$, $a\wedge 0=0$, $a\vee 1=1, a\wedge 1=a$;

7° 对偶律 $1-(a\vee b)=(1-a)\wedge(1-b)$, $1-(a\wedge b)=(1-a)\vee(1-b)$.

根据扎德算子$\vee,\wedge$的定义,并比较a,b,c的大小,不难证明上述定理. 这些性质表明,[0,1]上全体实数集合与扎德算子$\vee,\wedge$一起构成一个具有分配律的完全格. 如果在[0,1]上定义余运算

$$a^C \overset{\text{def}}{=\!=} 1-a,$$

则$([0,1],\vee,\wedge,{}^C)$是一个软代数.

定理 1.2.4 设$a,b,c,d\in[0,1]$,若$a\leqslant b, c\leqslant d$,则$a\vee c\leqslant b\vee d, a\wedge c\leqslant b\wedge d$.

证 因为$a\leqslant b\leqslant b\vee d, c\leqslant d\leqslant b\vee d$,所以$a\vee c\leqslant b\vee d$.

类似地可证$a\wedge c\leqslant b\wedge d$.

推论 设$a,b,c\in L$,若$b\leqslant c$,则$a\vee b\leqslant a\vee c, a\wedge b\leqslant a\wedge c$,这个性质称为格的保序性.

定理 1.2.5 设$a,b\in L$,则有

$$a\leqslant b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b.$$

定理 1.2.6 设$a,b,c\in L$,则有

$$a-(b\wedge c)=(a-b)\vee(a-c),$$
$$a-(b\vee c)=(a-b)\wedge(a-c).$$

1.3 模糊子集及其运算

1.3.1 模糊子集的概念

由 1.2 节知,经典集合 A 可由其特征函数 $\chi_A(x)$ 唯一确定,即映射 $\chi_A: X\to\{0,1\}, x\mapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$ 确定了 X 上的经典子集 A. $\chi_A(x)$表明 x 对 A 的隶属程度,不过仅有两种状态:一个元素 x 要么属于A,要么不属于A. 它确切地、数量化地描述了“非此即彼”现象. 但现实世界中并非完全如此. 比如,在生物学发展的历史上,曾把所有生物分为动物与植物两大类. 牛、羊、鸡、犬划为动物,这是无疑的. 而有一些生物,如猪笼草、捕蝇草、茅膏菜等,一方面能捕食昆虫,分泌液体消化昆虫,像动物一样;另一方面又长有叶片,能进行光合作用,自制养料,像植物一样. 类似这样的生物并不完全是“非动物即植物”,因此,不能简单地一刀切. 可见在动物与植物之间存在“中介状态”.

1. 模糊子集的直观描述与定义

图1.4

我们先从直观上来描述这种"中介状态".设论域U(图1.4),取具有单位长度的线段,把U上的模糊集合记为$\underset{\sim}{A}$.若元素x(线段)位于$\underset{\sim}{A}$(圆圈)的内部,记为1;若元素x位于$\underset{\sim}{A}$的外部,记为0;若元素x部分在$\underset{\sim}{A}$内又部分地在$\underset{\sim}{A}$外,则表示隶属的"中介状态",元素x位于$\underset{\sim}{A}$内部的长度则表示了x对于$\underset{\sim}{A}$的隶属程度.为了描述这种"中介状态",必须把元素对集合的绝对隶属关系(要么属于A,要么不属于A)扩展为各种不同程度的隶属关系,这就需要将经典集合A的特征函数$\chi_A(x)$的值域$\{0,1\}$推广到闭区间$[0,1]$上.这样一来,经典集合的特征函数就扩展为模糊集合的隶属函数了.

定义1.3.1 设U是论域,称映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1],$$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$$

确定了一个U上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$.映射$\mu_{\underset{\sim}{A}}$称为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数,$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$称为$x$对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度.使$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.5$的点$x$称为$\underset{\sim}{A}$的过渡点,此时该点最具模糊性.

由定义1.3.1可以看出,模糊子集$\underset{\sim}{A}$是由隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}$唯一确定的,以后总是把模糊子集$\underset{\sim}{A}$与隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}$看成是等同的.还应指出,隶属程度的思想是模糊数学的基本思想.

当$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的值域为$\{0,1\}$时,模糊子集$\underset{\sim}{A}$就是经典子集,而$\mu_{\underset{\sim}{A}}$就是它的特征函数.可见经典子集是模糊子集的特殊情形.

U上所有模糊子集所组成的集合称为U的模糊幂集,记为$\mathscr{F}(U)$.

为简便计,今后用$\underset{\sim}{A}(x)$来代替$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$.模糊子集简称为模糊集,隶属程度简称为隶属度.

例1.3.1 由于人种、地理环境等条件不同,人们对个子高矮的理解也不同.设论域$U=\{x_1(140),x_2(150),x_3(160),x_4(170),x_5(180),x_6(200)\}$(单位:cm)表示人的身高,那么"高个子"($\underset{\sim}{A}$),"中等个子"($\underset{\sim}{B}$),"矮个子"($\underset{\sim}{C}$)就是$U$上的三个模糊集.

$\underset{\sim}{A}$(高个子): $x_1 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_1)=0$, $x_2 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_2)=0.1$,

$x_3 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_3)=0.4$, $x_4 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_4)=0.5$,

$x_5 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_5)=0.8$, $x_6 \mapsto \underset{\sim}{A}(x_6)=1$;

$\underset{\sim}{B}$(中等个子): $x_1 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_1)=0.1$, $x_2 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_2)=0.3$,

$x_3 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_3)=0.6$, $x_4 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_4)=1$,

$x_5 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_5)=0.6,\quad x_6 \mapsto \underset{\sim}{B}(x_6)=0.1;$

$\underset{\sim}{C}$(矮个子)： $x_1 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_1)=0.9,\quad x_2 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_2)=0.7,$

$x_3 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_3)=0.6,\quad x_4 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_4)=0.4,$

$x_5 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_5)=0.2,\quad x_6 \mapsto \underset{\sim}{C}(x_6)=0.$

例 1.3.2 设论域$U=[0,200]$(单位:岁)表示人的年龄,扎德给出"年轻"($\underset{\sim}{Y}$)与"年老"($\underset{\sim}{O}$)两个模糊集,其隶属函数(图 1.5)分别为

$$\underset{\sim}{Y}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 200;\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{O}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 200.\end{cases}$$

不难计算出$\underset{\sim}{Y}(30)=0.5$,$\underset{\sim}{Y}(35)=0.2$;$\underset{\sim}{O}(55)=0.5$,$\underset{\sim}{O}(60)=0.8$. 这表明,30 岁的年龄属于"年轻"的隶属度为 50%,并称点$x=30$是"年轻"的过渡点;60 岁的年龄属于"年老"的隶属度为 80%;等等.

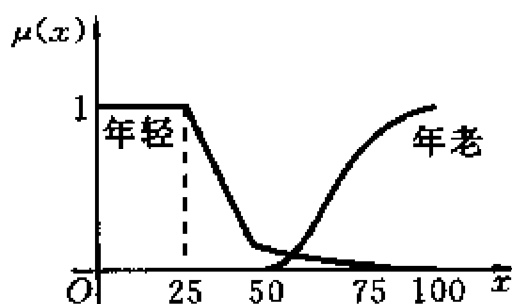


图 1.5

2. 模糊集的表示法

论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限集,U上的任一模糊集$\underset{\sim}{A}$,其隶属函数为$\{\underset{\sim}{A}(x_i)\}(i=1,2,\cdots,n)$.

(1) 扎德表示法.

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(x_1)}{x_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(x_n)}{x_n}.$$

这里"$\underset{\sim}{A}(x_i)/x_i$"不是分数,"+"也不表示求和,只有符号意义,它表示点x_i对模糊集$\underset{\sim}{A}$的隶属度是$\underset{\sim}{A}(x_i)$.

(2) 序偶表示法.

$$\underset{\sim}{A}=\{(x_1,\underset{\sim}{A}(x_1)),(x_2,\underset{\sim}{A}(x_2)),\cdots,(x_n,\underset{\sim}{A}(x_n))\}.$$

(3) 向量表示法.

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(x_1),\underset{\sim}{A}(x_2),\cdots,\underset{\sim}{A}(x_n)).$$

一般地,若$0\leqslant a_i\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$,则称$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为模糊向量. 由此可知,模糊向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以表示论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的模糊集$\underset{\sim}{A}$.

例 1.3.1 中$\underset{\sim}{A}$="高个子"可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6},$$

或者　$\underset{\sim}{A}=(0, 0.1, 0.4, 0.5, 0.8, 1)$.

又如，论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示n个企业.若以a_i记企业x_i的生产成本中劳动力所占比重，则

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

就是表示劳动密集型企业的模糊集.

注意，经典集合也可用扎德方法表示，例如，论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$可表示为

$$U=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}.$$

这表明$x_1,x_2,\cdots,x_n$绝对地属于U，即$x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$对U的隶属度为1.

论域U是无限集时，U上的模糊集$\underset{\sim}{A}$表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_{x\in U}\frac{\underset{\sim}{A}(x)}{x},$$

这里"$\int$"不是积分符号，"$\underset{\sim}{A}(x)/x$"也不是分数.

例1.3.2中的$\underset{\sim}{Y}$(年轻)、$\underset{\sim}{O}$(年老)可分别表示为

$$\underset{\sim}{Y}=\int_{x\in[0,25]}\frac{1}{x}+\int_{x\in[25,200]}\frac{\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}}{x},$$

$$\underset{\sim}{O}=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{0}{x}+\int_{50\leqslant x\leqslant 20}\frac{\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}.$$

1.3.2　模糊集的运算

现将经典集合的运算推广到模糊集.由于模糊集中没有点和集之间的绝对属于关系，所以其运算的定义只能以隶属函数间的关系来确定.

定义1.3.2　设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，定义

包含　$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(x),\ \forall x\in U$；

相等　$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(x),\ \forall x\in U$.

定义1.3.3　设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，定义(图1.6)：

并　$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$的隶属函数$\mu(x)$为

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x),\ \forall x\in U;$$

交　$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$的隶属函数$\mu(x)$为

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x),\ \forall x\in U;$$

余　$\underset{\sim}{A}^C$的隶属函数$\mu(x)$为

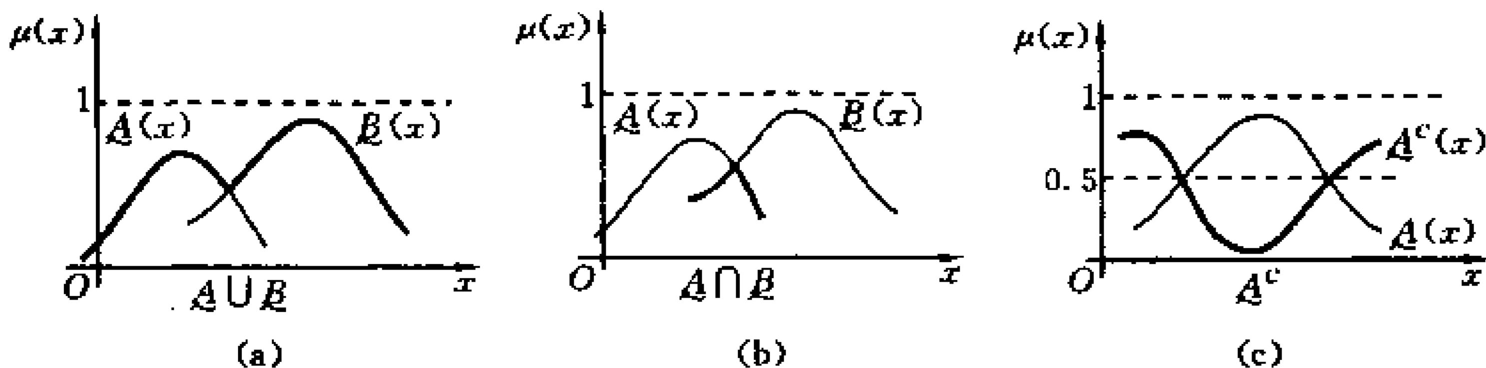


图1.6

$$\underset{\sim}{A}^C(x) \xlongequal{\text{def}} 1-\underset{\sim}{A}(x),\ \forall x \in U.$$

模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的并、交、余的计算公式如下：

1° 论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为有限集，且

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)}{x_i},\quad \underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},$$

则

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)\vee\underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},\quad \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)\wedge\underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},\quad \underset{\sim}{A}^C=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\underset{\sim}{A}(x_i)}{x_i}.$$

2° 论域U为无限集，且

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)}{x},\quad \underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{B}(x)}{x},$$

则 $$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)}{x},\quad \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)}{x},\quad \underset{\sim}{A}^C=\int_U\frac{1-\underset{\sim}{A}(x)}{x}.$$

例1.3.3 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$(商品集)，在$U$上定义两个模糊集：$\underset{\sim}{A}$="商品质量好"，$\underset{\sim}{B}$="商品质量差"，并设

$$\underset{\sim}{A}=(0.80,0.55,0,0.30,1),$$
$$\underset{\sim}{B}=(0.10,0.21,0.86,0.60,0),$$

那么，"商品质量不好"的模糊集为

$$\underset{\sim}{A}^C=(0.20,0.45,1,0.70,0),$$

容易算得 $$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^C=(0.80,0.55,1,0.70,1).$$

可知，$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^C\neq U$. 同样，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^C\neq\varnothing$.

值得注意的是，$\underset{\sim}{A}^C\neq\underset{\sim}{B}$，即"商品质量不好"并不等同于"商品质量差". 这正表明，用模糊集描述这些概念比经典集合好，模糊集能够很好表现这两个概念的差异.

例1.3.4 计算例1.3.2中模糊集$\underset{\sim}{Y}$与$\underset{\sim}{O}$的并、交和余.

先求二曲线的交点，即解方程

$$\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}=\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1},$$

得近似解 $x^{*}=51$，于是

$$\underset{\sim}{Y}\cup\underset{\sim}{Q}=\int_{0\leqslant x\leqslant 25}\frac{1}{x}+\int_{25<x\leqslant 51}\frac{\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}}{x}+\int_{51<x\leqslant 200}\frac{\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x};$$

$$\underset{\sim}{Y}\cap\underset{\sim}{Q}=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{0}{x}+\int_{50<x\leqslant 51}\frac{\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}+\int_{51<x\leqslant 200}\frac{\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}}{x};$$

$$\underset{\sim}{Y}^{C}=\int_{0\leqslant x\leqslant 25}\frac{0}{x}+\int_{25<x\leqslant 200}\frac{1-\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}}{x};$$

$$\underset{\sim}{Q}^{C}=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{1}{x}+\int_{50<x\leqslant 200}\frac{1-\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}.$$

模糊集的并、交、余运算的性质.

定理 1.3.1 $(\mathscr{T}(U),\cup,\cap,{}^{C})$具有如下性质：

1° 幂等律 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$；

2° 交换律 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$；

3° 结合律 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$；

4° 吸收律 $\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$；

5° 分配律 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$，

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$；

6° 0-1 律 $\underset{\sim}{A}\cup\varnothing=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\varnothing=\varnothing$，$U\cup\underset{\sim}{A}=U$，$U\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$；

7° 还原律 $(\underset{\sim}{A}^{C})^{C}=\underset{\sim}{A}$；

8° 对偶律 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})^{C}=\underset{\sim}{A}^{C}\cap\underset{\sim}{B}^{C}$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})^{C}=\underset{\sim}{A}^{C}\cup\underset{\sim}{B}^{C}$.

证 仅以对偶律为例. $\forall x\in U$，有

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})^{C}(x)&=1-(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(x)=1-[\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)]\\&=[1-\underset{\sim}{A}(x)]\wedge[1-\underset{\sim}{B}(x)]=\underset{\sim}{A}^{C}(x)\wedge\underset{\sim}{B}^{C}(x)\end{aligned}$$

$$=(\underset{\sim}{A}^C \cap \underset{\sim}{B}^C)(x),$$

由定义1.3.2知，$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^C = \underset{\sim}{A}^C \cap \underset{\sim}{B}^C$.

注意 从定理1.3.1可以看出，模糊集保留了经典集合的许多重要性质，但与经典集合相比又有一些根本性的区别. 在模糊集里，排中律不再成立(例1.3.3也表明了这一点)，说明模糊集不再具有“非此即彼”的特点. 这正是模糊性的本质特征.

上述两个模糊集的并、交运算，由于结合律成立，可以推广到有限多个与任意多个模糊集情形.

对于有限个模糊集，有如下定义.

定义1.3.4 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i$ 与 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i$ 的隶属函数分别定义为

$$(\bigcup_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i)(x) \xlongequal{\text{def}} \bigvee_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(x), \quad (\bigcap_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i)(x) \xlongequal{\text{def}} \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(x).$$

对于任意多个模糊集，有如下定义.

定义1.3.5 $\bigcup\limits_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t$ 与 $\bigcap\limits_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t$ 的隶属函数分别定义为

$$(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t)(x) \xlongequal{\text{def}} \bigvee_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t(x), \quad (\bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t)(x) \xlongequal{\text{def}} \bigwedge_{t\in T} \underset{\sim}{A}_t(x).$$

1.3.3 模糊集的其他运算

由于扎德算子($\vee$, $\wedge$)是对隶属度进行取大(max, $\vee$)和取小(min, $\wedge$)运算，这样可能丢掉许多信息，根据需要，人们引进了新算子.

1. 环和、乘积算子($\hat{+}$, $\cdot$)

定义1.3.6 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，定义：

环和($\hat{+}$)

$$(\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B})(x) \xlongequal{\text{def}} \underset{\sim}{A}(x) + \underset{\sim}{B}(x) - \underset{\sim}{A}(x) \cdot \underset{\sim}{B}(x), \quad \forall x \in U,$$

乘积($\cdot$)

$$(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})(x) \xlongequal{\text{def}} \underset{\sim}{A}(x) \cdot \underset{\sim}{B}(x), \quad \forall x \in U.$$

定理1.3.2 $(\mathscr{F}(U), \hat{+}, \cdot, ^C)$具有如下性质：

1° 交换律 $\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \hat{+} \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$;

2° 结合律 $(\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B}) \hat{+} \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \hat{+} (\underset{\sim}{B} \hat{+} \underset{\sim}{C})$, $(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}) \cdot \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{C})$;

3° 0-1律 $\underset{\sim}{A} \hat{+} U = U$, $\underset{\sim}{A} \cdot U = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \hat{+} \varnothing = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \cdot \varnothing = \varnothing$;

4° 对偶律 $(\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B})^C = \underset{\sim}{A}^C \cdot \underset{\sim}{B}^C$, $(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})^C = \underset{\sim}{A}^C \hat{+} \underset{\sim}{B}^C$.

环和、乘积运算不满足分配律、吸收律、幂等律和排中律.

证 只证对偶律的前一式，其他留给读者完成.

因为 $$(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})^C(x)=1-(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})(x)$$
$$=1-[\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{B}(x)-\underset{\sim}{A}(x)\cdot\underset{\sim}{B}(x)]$$
$$=[1-\underset{\sim}{A}(x)][1-\underset{\sim}{B}(x)]=\underset{\sim}{A}^C(x)\cdot\underset{\sim}{B}^C(x)$$
$$=(\underset{\sim}{A}^C\cdot\underset{\sim}{B}^C)(x),$$

所以 $$(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\cdot\underset{\sim}{B}^C.$$

2. 有界算子($\oplus$,$\boxdot$)

定义1.3.7 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{T}(U)$，定义：

有界和($\oplus$)

$$(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})(x)\xlongequal{\text{def}}1\wedge[\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{B}(x)],\quad\forall x\in U,$$

有界积($\boxdot$)

$$(\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{B})(x)\xlongequal{\text{def}}0\vee[\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{B}(x)-1],\quad\forall x\in U.$$

定理1.3.3 ($\mathscr{T}(U)$,$\oplus$,$\boxdot$,^{C})具有如下性质：

1° 交换律 $\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\boxdot\underset{\sim}{A}$；

2° 结合律 $(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})\oplus\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{C})$， $(\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{B})\boxdot\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\boxdot(\underset{\sim}{B}\boxdot\underset{\sim}{C})$；

3° 0-1律 $\underset{\sim}{A}\oplus U=U$， $\underset{\sim}{A}\boxdot U=\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{A}\oplus\varnothing=\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{A}\boxdot\varnothing=\varnothing$；

4° 对偶律 $(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\boxdot\underset{\sim}{B}^C$，$(\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\oplus\underset{\sim}{B}^C$；

5° 排中律 $\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{A}^C=U$， $\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{A}^C=\varnothing$.

有界和与有界积不满足分配律、幂等律和吸收律.

证 只证对偶律的前一式和排中律，其他留给读者完成.

因为 $$(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^C(x)=1-(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})(x)$$
$$=1-[1\wedge(\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{B}(x)]$$
$$=(1-1)\vee[1-\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)]$$
$$=0\vee[1-\underset{\sim}{A}(x)+1-\underset{\sim}{B}(x)-1]$$
$$=0\vee[\underset{\sim}{A}^C(x)+\underset{\sim}{B}^C(x)-1]=(\underset{\sim}{A}^C\boxdot\underset{\sim}{B}^C)(x),$$

所以 $$(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\boxdot\underset{\sim}{B}^C;$$

因为 $$(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{A}^C)(x)=1\wedge[\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{A}^C(x)]$$
$$=1\wedge[\underset{\sim}{A}(x)+1-\underset{\sim}{A}(x)]=1\wedge1=1,$$

所以 $$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{A}^C=U;$$

因为 $$(\underset{\sim}{A}\boxdot\underset{\sim}{A}^C)(x)=0\vee[\underset{\sim}{A}(x)+\underset{\sim}{A}^C(x)-1]$$
$$=0\vee[\underset{\sim}{A}(x)+1-\underset{\sim}{A}(x)-1]=0\vee0=0,$$

所以
$$\underset{\sim}{A} \boxdot \underset{\sim}{A}^c = \varnothing.$$

还有其他的一些算子，为查阅方便，列举如下($a,b\in[0,1]$).

3. 取大、乘积算子($\vee$，$\cdot$)

$$a \vee b \xlongequal{\text{def}} \max(a,b), \quad a \cdot b = ab.$$

4. 有界和、取小算子($\oplus$，$\wedge$)

$$a \oplus b \xlongequal{\text{def}} \min(1, a+b), \quad a \wedge b \xlongequal{\text{def}} \min(a,b).$$

5. 有界和、乘积算子($\oplus$，$\cdot$)

$$a \oplus b \xlongequal{\text{def}} \min(1, a+b), \quad a \cdot b = ab.$$

6. 艾因斯坦(Einstain)算子($\overset{+}{\varepsilon}$，$\dot{\varepsilon}$)

$$a \overset{+}{\varepsilon} b \xlongequal{\text{def}} \frac{a+b}{1+ab}, \quad a \dot{\varepsilon} b \xlongequal{\text{def}} \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}.$$

7. 哈梅彻(Hamacher)算子($\overset{+}{r}$，$\dot{r}$)

$$\left.\begin{aligned} a \overset{+}{r} b &\xlongequal{\text{def}} \frac{a \hat{+} b - (1-r)ab}{r+(1-r)(1-ab)}, \\ a \dot{r} b &\xlongequal{\text{def}} \frac{ab}{r+(1-r)(a \hat{+} b)}, \end{aligned}\right\} \quad r \in (0, +\infty).$$

当$r=1$时，($\overset{+}{r}$，$\dot{r}$)化为($\hat{+}$，$\cdot$)；当$r=2$时，($\overset{+}{r}$，$\dot{r}$)化为($\overset{+}{\varepsilon}$，$\dot{\varepsilon}$).

8. 雅戈尔(Yager)算子($\curlyvee$，$\curlywedge$)

$$\left.\begin{aligned} a \curlyvee b &\xlongequal{\text{def}} \min\{1, (a^\nu + b^\nu)^{1/\nu}\}, \\ a \curlywedge b &\xlongequal{\text{def}} 1 - \min\{1, [(1-a)^\nu + (1-b)^\nu]^{1/\nu}\}, \end{aligned}\right\} \nu \in [1, +\infty).$$

当$\nu=1$时，($\curlyvee$，$\curlywedge$)化为($\oplus$，$\boxdot$)；当$\nu\to+\infty$时，($\curlyvee$，$\curlywedge$)化为($\vee$，$\wedge$).

综观上述各种算子，最后指出两点：

1° 上述算子各有所长，在实际中要根据不同的研究对象，选用适当的算子来描述.

2° 在上述算子中，扎德算子($\vee$，$\wedge$)具有最好的代数性质，运算也简单，即使它有某些缺陷，人们还是乐于选用它.

1.4 模糊集的基本定理

模糊集的基本定理，主要是指分解定理和扩张原理，它们在模糊数学中起着重要作用.

1.4.1 λ-截集

分解定理是联系经典集合与模糊集合的桥梁，而模糊集的截集正是建造这个

桥梁的一种较理想的工具.

定义 1.4.1　设$\underset{\sim}{A}\in\mathcal{F}(U)$,对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,记

$$(\underset{\sim}{A})_\lambda = A_\lambda \xlongequal{\text{def}} \{x \mid \underset{\sim}{A}(x) \geqslant \lambda\}.$$

称A_λ为$\underset{\sim}{A}$的λ-截集,其中λ称为阈值或置信水平.

由定义1.4.1知,模糊集的λ-截集A_λ是一个经典集合,由隶属度不小于λ的成员构成.它的特征函数为

$$\chi_{A_\lambda}(x) = \begin{cases} 1, & \underset{\sim}{A}(x) \geqslant \lambda, \\ 0, & \underset{\sim}{A}(x) < \lambda. \end{cases}$$

例 1.4.1　**λ-截集**　设论域$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$,$u_i$表示学生,他们某门功课的分数依次是50,60,70,85,90,95.$\underset{\sim}{A}$="学习成绩好的学生",他们所得的分数除以100后,即为各自对$\underset{\sim}{A}$的隶属度,即

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.7}{u_3} + \frac{0.85}{u_4} + \frac{0.9}{u_5} + \frac{0.95}{u_6},$$

要确定"学习成绩好的学生"实际上就是要将模糊集$\underset{\sim}{A}$转化为经典集合,即先确定一个阈值λ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,然后将隶属度$\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda$的元素找出来.当$\lambda$取0.9,0.8,0.6,0.5时,有

$$A_{0.9}(90\text{ 分以上者}) = \{u_5,u_6\},$$
$$A_{0.8}(80\text{ 分以上者}) = \{u_4,u_5,u_6\},$$
$$A_{0.6}(60\text{ 分以上者}) = \{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\},$$
$$A_{0.5}(50\text{ 分以上者}) = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}.$$

由此可见,可将一个模糊集$\underset{\sim}{A}$转化为经典集合A_λ,λ越小,λ-截集A_λ包含的元素越多,反之亦然.模糊集的λ-截集实际上是一组经典集合组成的"集合套":

$$\{u_5,u_6\}\subseteq\{u_4,u_5,u_6\}\subseteq\{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}\subseteq U.$$

例 1.4.2　设$\underset{\sim}{A}\in\mathcal{F}(U)$,$\mathbf{R}$表示实数集.

$$\underset{\sim}{A}(x) = \exp\left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbf{R},$$

其中$a\in\mathbf{R}$,$\sigma>0$(图1.7).称A为以(a,σ)为参数的正态模糊集.对于$0<\lambda\leqslant1$,试求A_λ.

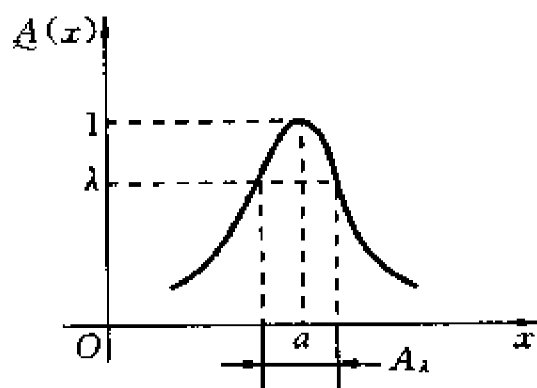


图1.7

解　关键在于解不等式$\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda$.

$$\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda \Leftrightarrow -\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\geqslant\ln\lambda$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2\leqslant-\sigma^2\ln\lambda$$
$$\Leftrightarrow a-\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda},$$

因此
$$A_\lambda=\{x\mid a-\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}\},$$
即
$$A_\lambda=[a-\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda},a+\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}].$$
这是一个闭区间. 当 $\lambda=1$ 时, $A_1=[a,a]=\{a\}$.

以后将会看到,正态模糊集有着广泛的应用,它表示"在数 a 的左右"这样的模糊概念.

λ-截集具有以下定理所述的性质.

定理 1.4.1 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$, $\lambda,\mu\in[0,1]$,于是有

1° 若 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$,则 $A_\lambda\subseteq B_\lambda$;

2° 若 $\lambda\leqslant\mu$,则 $A_\lambda\supseteq A_\mu$;

3° $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$, $\quad(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$.

证 只证性质 2°和 3°,性质 1°的证明留给读者自己完成.

2° $\lambda\leqslant\mu\Longrightarrow A_\mu=\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\mu\}\subseteq\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda\}=A_\lambda$.

3° $x\in(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda\Leftrightarrow(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)\geqslant\lambda$

$\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda$ 或 $\underset{\sim}{B}(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow x\in A_\lambda$ 或 $x\in B_\lambda$

$\Leftrightarrow x\in A_\lambda\cup B_\lambda$.

类似地可证第二个等式.

性质 2°从理论上回答了"λ 值越小, A_λ 包含的元素越多"的问题. 这种让 λ 由大到小取值,而 A_λ 所含元素则由少到多的过程,实际上是一种分类过程. λ 取值越大, A_λ 包含元素就越少,分出的类就越多,分类也就越细;反之, λ 取值越小, A_λ 包含元素就越多,分类也就越粗. 这正是以后学习模糊聚类分析的基础.

为了后面的应用,现引进几个常用术语.

定义 1.4.2 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$,则有如下术语:

1° 称集合 $\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}=\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)>0\}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的支集,记 $\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}=A_0$.

2° 称集合 $\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A}=\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)=1\}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的核,记 $\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A}=A_1$. 若 $\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A}\neq\varnothing$,则称 $\underset{\sim}{A}$ 为正规模糊集.

3° 称集合 $\mathrm{Bd}\,\underset{\sim}{A}=\{x\mid 0<\underset{\sim}{A}(x)<1\}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的边界,即 $\mathrm{Bd}\,\underset{\sim}{A}=\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}-\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A}$.

所谓核 A_1,是由使 $\underset{\sim}{A}(x)=1$ 的元素构成的,即由完全属于 $\underset{\sim}{A}$ 的元素构成. 随着 λ 由 1 变到 0, A_λ 从 A_1 出发不断扩大,收进越来越多的元素,达到 $\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}$. $\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}=A_0=\{x\mid\underset{\sim}{A}(x)>0\}$ 是隶属度大于 0 的元素的最大集合. $\underset{\sim}{A}$ 的边界 $\mathrm{Bd}\,\underset{\sim}{A}$ 则是介于完全属于 $\underset{\sim}{A}$ 与完全不属于 $\underset{\sim}{A}$ 之间的元素的全体. 这正表明了 $\underset{\sim}{A}$ 的边界是不分明的(图 1.8).

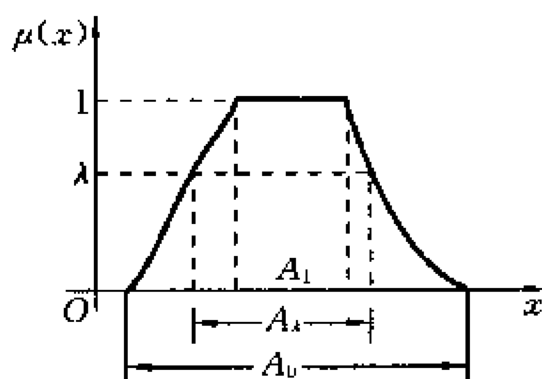


图 1.8

例1.4.3 λ-截集 古代史分期（指划分奴隶社会和封建社会的界限）是模糊的，若记

$$\underset{\sim}{A}(\text{奴隶社会})=\frac{1}{\text{夏}}+\frac{1}{\text{商}}+\frac{0.9}{\text{西周}}+\frac{0.7}{\text{春秋}}+\frac{0.5}{\text{战国}}+\frac{0.4}{\text{秦}}+\frac{0.3}{\text{西汉}}+\frac{0.1}{\text{东汉}},$$

则由于$\underset{\sim}{A}$(战国)＝0.5，所以$\underset{\sim}{A}$(奴隶社会)的过渡点是战国，这表明要判明战国到底是奴隶社会还是封建社会是最有争论的.

Supp $\underset{\sim}{A}$＝{夏，商，西周，春秋，战国，秦，西汉，东汉}，

Ker $\underset{\sim}{A}$＝{夏，商}，

Bd $\underset{\sim}{A}$＝{西周，春秋，战国，秦，西汉，东汉}.

1.4.2 分解定理

为了叙述分解定理，首先介绍一种新运算，即数$\lambda\in[0,1]$与模糊子集$\underset{\sim}{A}$的乘积$\lambda\underset{\sim}{A}$.

定义1.4.3 设$\lambda\in[0,1]$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(U)$，规定$\lambda\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(U)$，其隶属函数为

$$(\lambda\underset{\sim}{A})(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\lambda\wedge\underset{\sim}{A}(x),$$

并称$\lambda\underset{\sim}{A}$为数$\lambda$与模糊集$\underset{\sim}{A}$的乘积. 可见$\lambda\underset{\sim}{A}$是一模糊子集.

特别地，若A是U的一个经典集合，则λA表示由λ和A所确定的一个模糊集，其隶属函数为

$$(\lambda A)(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\lambda\wedge\chi_A(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

这个模糊集λA称为λ与A的“积”. 由此可以看出，当$x\in A$时，x对于λA的隶属度等于λ.

数λ与模糊子集$\underset{\sim}{A}$的乘积运算的性质如下：

1° $\lambda_1<\lambda_2\Longrightarrow\lambda_1\underset{\sim}{A}\subseteq\lambda_2\underset{\sim}{A}$；

2° $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Longrightarrow\lambda\underset{\sim}{A}\subseteq\lambda\underset{\sim}{B}$.

证 只证性质2°，性质1°留给读者自己证明.

因为$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，所以$\underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(x)$，由本章1.2节格的保序性知

$$\lambda\wedge\underset{\sim}{A}(x)\leqslant\lambda\wedge\underset{\sim}{B}(x),\quad(\lambda\underset{\sim}{A})(x)\leqslant(\lambda\underset{\sim}{B})(x),$$

因此
$$\lambda\underset{\sim}{A}\leqslant\lambda B.$$

定理1.4.2（分解定理） 设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(U)$，则

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda.$$

定理1.4.2表明，模糊集可由经典集合表示，这反映了模糊集和经典集合的密切关系，建立了模糊集与经典集合的转化关系.

证　只要证$\underset{\sim}{A}(x)=(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda)(x)$即可.

由定义 1.4.3 可知

$$(\lambda A_\lambda)(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in A_\lambda:\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\lambda,\\ 0, & x\notin A_\lambda:\underset{\sim}{A}(x)<\lambda.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda)(x)&=\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant1}(\lambda A_\lambda)(x)\\&=[\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(x)}(\lambda A_\lambda)(x)]\vee[\bigvee_{\underset{\sim}{A}(x)<\lambda\leqslant1}(\lambda A_\lambda)(x)]\\&=[\bigvee_{0\leqslant\lambda\leqslant\underset{\sim}{A}(x)}[\lambda]]\vee[\bigvee_{\underset{\sim}{A}(x)<\lambda\leqslant1}[0]]=\underset{\sim}{A}(x),\end{aligned}$$

故

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda.$$

例 1.4.4　设$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，　$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(U)$，

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.8}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{1}{u_4}.$$

根据分解定理，$\underset{\sim}{A}$可分解为

$$\underset{\sim}{A}=1A_1\cup0.8A_{0.8}\cup0.7A_{0.7}\cup0.2A_{0.2},$$

同时，可以验证，右端的并就是$\underset{\sim}{A}$. 事实上

$$A_1=\{u_4\}=\frac{1}{u_4},\quad 1A_1=\frac{1}{u_4};$$

$$A_{0.8}=\{u_2,u_4\}=\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_4},\quad 0.8A_{0.8}=\frac{0.8}{u_2}+\frac{0.8}{u_4};$$

$$A_{0.7}=\{u_1,u_2,u_4\}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_4},\quad 0.7A_{0.7}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{0.7}{u_4};$$

$$A_{0.2}=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4},$$

$$0.2A_{0.2}=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.2}{u_4}.$$

$$\begin{aligned}&1A_1\cup0.8A_{0.8}\cup0.7A_{0.7}\cup0.2A_{0.2}\\&=\frac{1}{u_4}\vee\left(\frac{0.8}{u_2}+\frac{0.8}{u_4}\right)\vee\left(\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{0.7}{u_4}\right)\vee\left(\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.2}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.2}{u_4}\right)\\&=\frac{0.7\vee0.2}{u_1}+\frac{0.8\vee0.7\vee0.2}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{1\vee0.8\vee0.7\vee0.2}{u_4}\\&=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.8}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\underset{\sim}{A}.\end{aligned}$$

由上述证明立即可得分解定理的另一形式.

推论 1　设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(U)$，则

$$\underset{\sim}{A}(x)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge\chi_{A_\lambda}(x)].$$

由上述证明可知，x 对$\underset{\sim}{A}$的隶属度还可以用下列推论所述的方式表示.

推论 2 设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$,对$\forall x\in U$,则

$$\underset{\sim}{A}(x)=\vee\{\lambda\in[0,1];x\in A_\lambda\}.$$

推论 2 表明:若已知模糊集$\underset{\sim}{A}$的所有 λ-截集,则可反过来求出模糊集$\underset{\sim}{A}$.

例 1.4.5 设论域$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,且

$$A_{0.1}=\{1,2,3,4,5,6\},\quad A_{0.4}=\{2,3,4,5,6\},$$
$$A_{0.8}=\{3,4,5\},\qquad A_1=\{4\},$$

试求$\underset{\sim}{A}$.

解 由推论 2 知

$$\underset{\sim}{A}(1)=\vee\{0.1\}=0.1,$$
$$\underset{\sim}{A}(2)=\underset{\sim}{A}(6)=\vee\{0.1,0.4\}=0.4,$$
$$\underset{\sim}{A}(3)=\underset{\sim}{A}(5)=\vee\{0.1,0.4,0.8\}=0.8,$$
$$\underset{\sim}{A}(4)=\vee\{0.1,0.4,0.8,1\}=1,$$

故
$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.1}{1}+\frac{0.4}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.4}{6},$$

$\underset{\sim}{A}$可解释为“靠近 4 的数”.

1.4.3 扩张原理

在 1.3 节中曾叙述过经典扩张原理,它实际上表示一个集合变换.现在的问题是,在普通映射$f:U\to V$下,若$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$,那么问:$f(\underset{\sim}{A})$是什么?这就是扎德教授提出的扩张原理.

定义 1.4.4(扩张原理) 设映射$f:U\to V$,称映射

$$f:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V),$$
$$\underset{\sim}{A}\mapsto f(\underset{\sim}{A})$$

为从映射f扩张的模糊变换,其隶属函数为

$$f(\underset{\sim}{A})(v)\xlongequal{\text{def}}\bigvee_{f(u)=v}\underset{\sim}{A}(u).$$

称映射
$$f^{-1}:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U),$$
$$\underset{\sim}{B}\mapsto f^{-1}(\underset{\sim}{B})$$

为从映射f扩张的反向模糊变换,其隶属函数为

$$f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u)\xlongequal{\text{def}}\underset{\sim}{B}(f(u)).$$

称$f(\underset{\sim}{A})$为$\underset{\sim}{A}$的像,称$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{B}$的原像.

例 1.4.6 设论域$U=\{1,2,3,4,5,6\}$到$V=\{a,b,c,d\}$的映射f定义如下:

$$f(u)=\begin{cases}a, & u=1,2,3,\\ b, & u=4,5,\\ c, & u=6.\end{cases}$$

设$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.1}{5}+\frac{0.9}{6}$，试求$f(\underset{\sim}{A})$.

由扩张原理知

$$f(\underset{\sim}{A})(a)=\bigvee_{f(u)=a}\underset{\sim}{A}(u)=\vee[\underset{\sim}{A}(1),\underset{\sim}{A}(2),\underset{\sim}{A}(3)]=1,$$

$$f(\underset{\sim}{A})(b)=\bigvee_{f(u)=b}\underset{\sim}{A}(u)=\vee[\underset{\sim}{A}(4),\underset{\sim}{A}(5)]=0.1,$$

$$f(\underset{\sim}{A})(c)=\bigvee_{f(u)=c}\underset{\sim}{A}(u)=\vee[\underset{\sim}{A}(6)]=0.9,$$

$$f(\underset{\sim}{A})(d)=\bigvee_{f(u)=d}\underset{\sim}{A}(u)=0,$$

所以

$$f(\underset{\sim}{A})=\frac{1}{a}+\frac{0.1}{b}+\frac{0.9}{c}+\frac{0}{d}.$$

又设$\underset{\sim}{B}=\frac{0.7}{a}+\frac{0.2}{b}+\frac{0.9}{c}+\frac{0}{d}$，试求$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$.

由$f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u)=\underset{\sim}{B}(f(u))$可直接得出

$$\begin{aligned}f^{-1}(\underset{\sim}{B})&=\frac{\underset{\sim}{B}(f(1))}{1}+\frac{\underset{\sim}{B}(f(2))}{2}+\frac{\underset{\sim}{B}(f(3))}{3}\\&\quad+\frac{\underset{\sim}{B}(f(4))}{4}+\frac{\underset{\sim}{B}(f(5))}{5}+\frac{\underset{\sim}{B}(f(6))}{6}\\&=\frac{0.7}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.2}{4}+\frac{0.2}{5}+\frac{0.9}{6}.\end{aligned}$$

设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(V)$，在映射$f:U\to V$下，$f(\underset{\sim}{A})$和$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$又如何分解呢？下面的定义回答了这一问题.

定义 1.4.5　设映射$f:U\to V$.

映射$f:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$，

$$\underset{\sim}{A}\mapsto f(\underset{\sim}{A})\overset{\text{def}}{=\!=}\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda);$$

映射$f^{-1}:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U)$，

$$\underset{\sim}{B}\mapsto f^{-1}(\underset{\sim}{B})\overset{\text{def}}{=\!=}\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda).$$

称$f(\underset{\sim}{A})$为$\underset{\sim}{A}$的像，$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{B}$的原像.

这实际上给出了$f(\underset{\sim}{A})$，$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$的分解定理.

1.5　隶属函数的确定

前面曾经指出过，隶属程度的思想是模糊数学的基本思想. 元素属于模糊集的隶属度是主观臆造的，还是客观存在的，这是本节首先要讨论的一个问题. 应用模糊数学方法的关键在于建立符合实际的隶属函数，然而，这是至今尚未完全解决的问题. 我国学者汪培庄教授提出的随机集落影理论对于相当一部分模糊集的隶属

函数的客观实在性给出了满意的解释，基于这一理论的模糊统计方法是确定一类模糊集的隶属度的有效方法. 为了使读者便于操作，本节主要介绍确定隶属度与隶属函数所常用的方法.

1.5.1　隶属度的客观存在性

对于隶属度的确定有不同的观点与处理方法. 为了说明隶属度的客观存在性，先介绍模糊统计试验.

1. 模糊统计试验

所谓模糊统计试验包含四个要素：

1° 论域U.

2° U 中的一个固定元素u_0.

3° U 中的一个随机运动集合A^*(经典集合).

4° U 中的一个以A^*作为弹性边界的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，制约着A^*的运动. A^*可以覆盖u_0，也可以不覆盖u_0，因而u_0对$\underset{\sim}{A}$的隶属关系是不确定的.

模糊统计试验特点是：在各次试验中，u_0是固定的，而A^*在随机变动.

2. 隶属度的客观存在性

在模糊统计试验中，u_0是固定的，A^*是变动的，A^*是对$\underset{\sim}{A}$的一次近似. A^*可以盖住u_0，也可以不盖住u_0，这就使得u_0对A的隶属关系是不确定的. 这种不确定性，正是由于$\underset{\sim}{A}$的模糊性产生的.

设做n次试验，可算出A^*覆盖u_0的次数，即

$$u_0\text{对}\underset{\sim}{A}\text{的隶属频率}=\frac{u_0\in A^*\text{的次数}}{n}.$$

实践证明，随着n的增大，隶属频率呈现出稳定性，频率稳定值称为u_0对A的隶属度，即

$$\underset{\sim}{A}(u_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{u_0\in A^*\text{的次数}}{n}.$$

这里隶属频率呈现出的稳定性正表明了隶属度的客观存在性.

1.5.2　隶属函数的确定方法

1. 模糊统计方法

为了便于操作，下面通过实例说明模糊统计方法.

例1.5.1　模糊统计　为了建立模糊集$\underset{\sim}{A}$="青年人"的隶属函数，以及$u_0=27$岁属于模糊集$\underset{\sim}{A}$(青年人)的隶属度. 以人的年龄作论域$U=[0,100]$，张南纶[5]等进行过一次较大的模糊统计试验，他们在武汉某高校进行抽样调查，要求被抽取的大学生在独立认真考虑了"青年人"的含义后，给出"青年人"的年龄区间，随机地抽取

了129人,相应得到了"青年人"的129个年龄区间——样本值(表1.2).

表1.2

18~25	17~30	17~28	18~25	16~35	14~25	18~30
18~35	18~35	16~25	15~30	18~35	17~30	18~25
18~35	20~30	18~30	16~30	20~35	18~30	18~25
18~35	15~25	18~30	15~28	16~28	18~30	18~30
16~30	18~35	18~25	18~30	16~28	18~30	16~30
16~28	18~35	18~35	17~27	16~28	15~28	18~25
19~28	15~30	15~26	17~25	15~36	18~30	17~30
18~35	16~35	16~30	15~25	18~28	16~30	15~28
18~35	18~30	17~28	18~35	15~28	15~25	15~25
15~25	18~30	16~24	15~25	16~32	15~27	18~35
16~25	18~30	16~28	18~30	18~35	18~30	18~30
17~30	18~30	18~35	16~30	18~28	17~25	15~30
18~25	17~30	14~25	18~26	18~29	18~35	18~28
18~35	18~25	16~35	17~29	18~25	17~30	16~28
18~30	16~28	15~30	18~30	16~30	20~30	20~30
16~25	17~30	15~30	18~30	16~30	18~28	15~35
16~30	15~30	18~35	18~35	18~30	17~30	16~35
17~30	15~25	18~35	15~30	15~25	15~30	18~30
17~25	18~29	18~28				

为了确定$u_0=27$岁属于模糊集$\underset{\sim}{A}$(青年人)的隶属度,对$u_0=27$作统计处理,结果如表1.3所示.其中n表示样本总数,m为样本区间盖住27的频数,而$f=m/n$为隶属频率.以n为横坐标,隶属频率f为纵坐标,绘制图形(图1.9).

表1.3

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	129
m	6	14	23	31	39	47	53	62	68	76	85	95	101
f	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.76	0.77	0.79	0.78

统计结果表明,27的隶属度稳定在0.78附近,因此

$$\underset{\sim}{A}(27)=0.78.$$

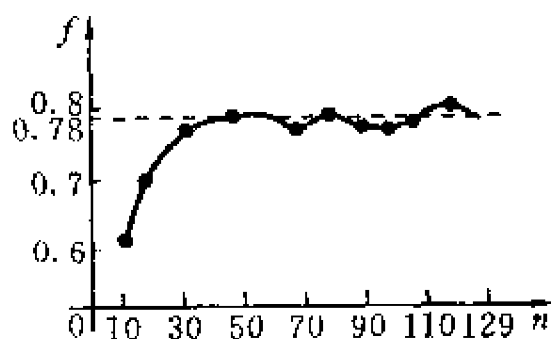


图1.9

为了作出$\underset{\sim}{A}$(青年人)的隶属函数$\underset{\sim}{A}(x)$,采用"方框图法".根据表1.2可知,最小数据是14,最大数据是36.于是,以13.5岁为起点,36.5岁为终点,以1为长度,作23个区间的划分,

数据如表1.4所示.

表1.4

序号	年龄分组	频数	相对频数
1	13.5~14.5	2	0.0155
2	14.5~15.5	27	0.2093
3	15.5~16.5	51	0.3953
4	16.5~17.5	67	0.5194
5	17.5~18.5	124	0.9612
6	18.5~19.5	125	0.9690
7	19.5~20.5	129	1
8	20.5~21.5	129	1
9	21.5~22.5	129	1
10	22.5~23.5	129	1
11	23.5~24.5	129	1
12	24.5~25.5	128	0.9922
13	25.5~26.5	103	0.7984
14	26.5~27.5	101	0.7829
15	27.5~28.5	99	0.7674
16	28.5~29.5	80	0.6202
17	29.5~30.5	77	0.5969
18	30.5~31.5	27	0.2093
19	31.5~32.5	27	0.2093
20	32.5~33.5	26	0.2016
21	33.5~34.5	26	0.2016
22	34.5~35.5	26	0.2016
23	35.5~36.5	1	0.0078
$\sum$		129	13.6589

以年龄为横坐标,相对频率为纵坐标,绘出$\underset{\sim}{A}(x)$的曲线,如图1.10所示.由图可以求出,$\underset{\sim}{A}(27)=0.78$.这表明27岁对于$\underset{\sim}{A}$(青年人)的隶属度是0.78.

模糊统计与概率统计的区别是:若把概率统计比喻为"变动的点"是否落在"不动的圈"内(如图1.11(a),试验A固定,ω随机变化),则可把模糊统计比喻为"变动的圈"是否盖住"不动的点"(如图1.11(b),试验u_0固定,A^*随机变化).

2. 指派方法

指派隶属函数的方法普遍被认为是一种主观的方法,它可以把人们的实践经

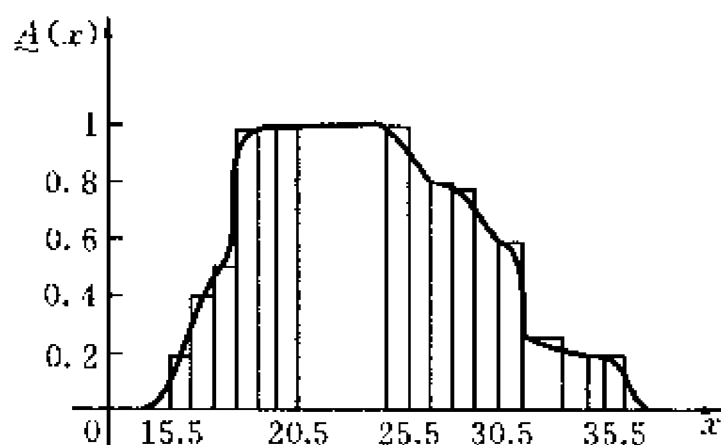


图 1.10

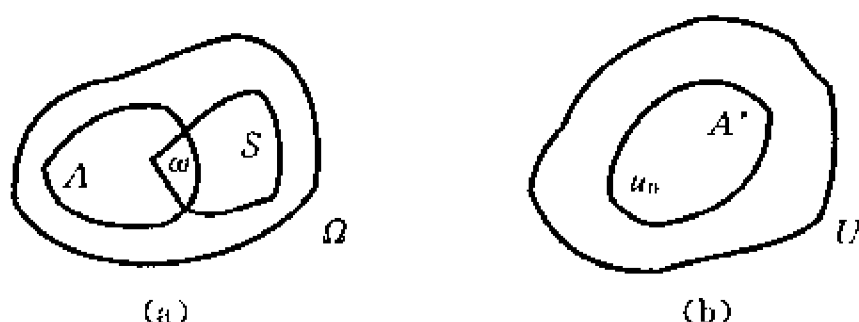


图 1.11

验考虑进去.若模糊集定义在实数域 **R** 上,则模糊集的隶属函数便称为模糊分布.所谓指派方法,就是根据问题的性质套用现成的某些形式的模糊分布,然后根据测量数据确定分布中所含的参数.常用的模糊分布如表 1.5 所示.

为了便于读者操作,根据实际描述的对象,在这里给出指派(或选择)的大致方向.

偏小型模糊分布适合描述像"小"、"冷"、"青年"以及颜色的"淡"等偏向小的一方的模糊现象,其隶属函数的一般形式为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ f(x), & x>a.\end{cases}$$

其中 a 为常数,而 $f(x)$ 是非增函数.

偏大型模糊分布适合描述像"大"、"热"、"老年"以及颜色的"浓"等偏向大的一方的模糊现象,其隶属函数的一般形式为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ f(x), & x>a.\end{cases}$$

其中 a 为常数,而 $f(x)$ 是非减函数.

中间型模糊分布适合描述像"中"、"暖和"、"中年"等处于中间状态的模糊现象,其隶属函数可以通过中间型模糊分布表示.

需要指出的是,确定模糊集的隶属函数的方法是多样的,但这些方法所给出的隶属函数只是近似的.因此需要在实践中不断地通过学习,加以修改,使之逐步完

表1.5

模糊分布	类型：偏小型	类型：中间型	类型：偏大型
矩形分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a \text{ 或 } x>b,\\ 1, & a\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$
梯形分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ \frac{b-x}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x<c,\\ \frac{d-x}{d-c}, & c\leqslant x<d,\\ 0, & x\geqslant d.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$
k 次抛物形分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x<c,\\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^k, & c\leqslant x<d,\\ 0, & x\geqslant d.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$

续表

模糊分布	类型：偏小型	类型：中间型	类型：偏大型
Γ分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\end{cases}\ (k>0).$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}e^{k(x-a)}, & x<a,\\ 1, & a\leqslant x<b\\ e^{-k(x-b)}, & x\geqslant b.\end{cases}\ (k>0).$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1-e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\end{cases}\ (k>0).$
正态分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ 1-e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a.\end{cases}$
柯西分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ \frac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}, & x>a\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0).$	$\underset{\sim}{A}(x)=\frac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}$ ($\alpha>0$，β为正偶数).	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \frac{1}{1+\alpha(x-a)^{-\beta}}, & x>a\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0).$

续表

模糊分布	类型		
	偏小型	中间型	偏大型
岭形分布	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2,\\ 0, & x>a_2.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a_1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2,\\ 1, & a_2\leqslant x<a_3,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{a_4-a_3}\left(x-\frac{a_3+a_4}{2}\right), & a_3\leqslant x<a_4,\\ 0, & x\geqslant a_4.\end{cases}$	$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a_1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2,\\ 1, & x>a_2.\end{cases}$

善.例如在论域$U=\{1,2,\cdots,9\}$上确定$\underset{\sim}{A}$="靠近5的数"的隶属函数,用指派方法易知,选用中间型$\underset{\sim}{A}(x)=\dfrac{1}{1+(x-5)^2}$,容易算得

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.06}{1}+\frac{0.1}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.5}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}+\frac{0.06}{9}.$$

$\underset{\sim}{A}(4)=\underset{\sim}{A}(6)=0.5$,不符合实际.

若将其隶属函数修改为$\underset{\sim}{A}(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}(x-5)^2}$,则

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.24}{1}+\frac{0.36}{2}+\frac{0.56}{3}+\frac{0.83}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.83}{6}+\frac{0.56}{7}+\frac{0.36}{8}+\frac{0.24}{9},$$

这表明修改后的隶属函数有所改善.

若再次修改为$\underset{\sim}{A}(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{10}(x-5)^2}$,则

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.38}{1}+\frac{0.53}{2}+\frac{0.71}{3}+\frac{0.91}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.91}{6}+\frac{0.71}{7}+\frac{0.53}{8}+\frac{0.38}{9},$$

这表明再次修改后的隶属函数比较符合实际.因此,$\underset{\sim}{A}$="靠近5的数"的隶属函数可确定为

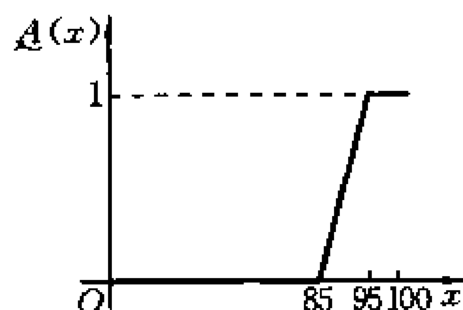
$$\underset{\sim}{A}(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{10}(x-5)^2}.$$

即使最后确定的一个隶属函数,也仍是近似的,只是近似程度要好些.

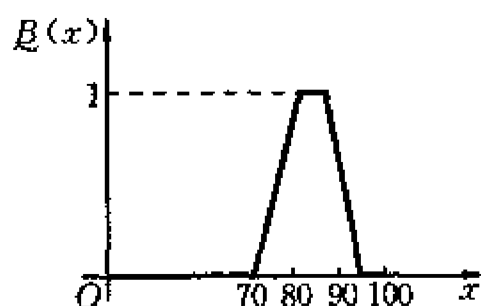
例1.5.2 隶属函数 设论域$U=[0,100]$(分数),在U上建立评价学生成绩的三个模糊集$\underset{\sim}{A}$="优",$\underset{\sim}{B}$="良",$\underset{\sim}{C}$="差".用指派方法,它们分别是偏大型、中间型、偏小型,采用梯形分布,容易从表1.4中选择出模糊集$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}$的隶属函数(图1.12).

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 85,\\ (x-85)/10, & 85<x\leqslant 95,\\ 1, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$

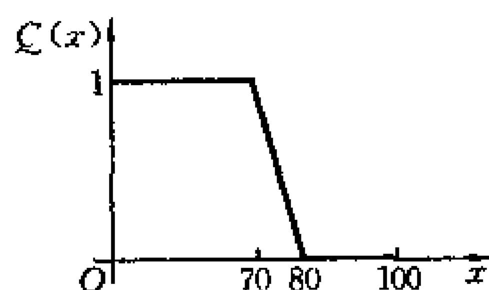
$$\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 70,\\ (x-70)/10, & 70<x\leqslant 80,\\ 1, & 80<x\leqslant 85,\\ (95-x)/10, & 85<x\leqslant 95,\\ 0, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$



(a)



(b)



(c)

图1.12

$$\underset{\sim}{C}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 70,\\ (80-x)/10, & 70<x\leqslant 80,\\ 0, & 80<x\leqslant 100.\end{cases}$$

3. 借用已有的"客观"尺度

在经济管理、社会科学中，可以直接借用已有的尺度(经济指标)作为模糊集的隶属度.

比如，在论域U(设备)上定义模糊集$\underset{\sim}{A}$="设备完好"，以"设备完好率"作为隶属度来表示"设备完好"这个模糊集是十分恰当的. 在论域U(产品)上定义模糊集$\underset{\sim}{B}$="质量稳定"，可用产品的"正品率"作为产品属于"质量稳定"的隶属度. 在论域U(家庭)上定义模糊集$\underset{\sim}{C}$="贫困家庭"，可用恩格尔(Engel)系数$=\dfrac{\text{食品消费支出}}{\text{总消费}}$作为隶属度来表示家庭贫困程度.

4. 二元对比排序法

对于有些模糊集，很难直接给出隶属度，但通过两两比较，容易确定两个元素相应隶属度的大小. 先排序，再用数学方法加工得到隶属函数. 实际上，这是隶属函数(模糊分布)的一种离散表示法(详见4.2节).

1.6 模糊集的应用

在1.1节中曾经讲过，模糊数学在实际中的应用几乎涉及国民经济的各个领域. 本节主要介绍模糊数学在科学技术、经济管理中的应用.

例1.6.1 自然界的模糊集 自然界是由生物与非生物组成的. 一切具有生命、能表现出各种生命现象——新陈代谢、生长发育和繁殖、感应性和适应性、遗传变异——的都是生物. 自古以来，人类把生物划分为动物和植物两大类，记$\underset{\sim}{A}$="动物"，$\underset{\sim}{B}$="植物"，在自然界中取一些生物构成论域$U=\{u_1$(牛)，u_2(羊)，u_3(稻)，u_4(麦)，u_5(海绵)，u_6(海葵)，u_7(粘菌)，u_8(衣藻)，u_9(眼虫藻)，u_{10}(小麦杆病菌)，u_{11}(稻瘟病菌)，u_{12}(蘑菇)，u_{13}(木耳)$\}$，则

$$\underset{\sim}{A}(\text{动物})=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0}{u_3}+\frac{0}{u_4}+\frac{0.9}{u_5}+\frac{0.9}{u_6}+\frac{0.5}{u_7}+\frac{0.5}{u_8}+\frac{0.5}{u_9}+\frac{0.2}{u_{10}}+\frac{0.2}{u_{11}}+\frac{0.1}{u_{12}}+\frac{0.1}{u_{13}},$$

$$\underset{\sim}{B}(\text{植物})=\frac{0}{u_1}+\frac{0}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.1}{u_5}+\frac{0.1}{u_6}+\frac{0.5}{u_7}+\frac{0.5}{u_8}+\frac{0.5}{u_9}+\frac{0.7}{u_{10}}+\frac{0.7}{u_{11}}+\frac{0.8}{u_{12}}+\frac{0.8}{u_{13}}.$$

上述两式的意义是：u_1(牛)，u_2(羊)绝对地属于$\underset{\sim}{A}$(动物)；u_3(稻)，u_4(麦)绝对

地属于$\underset{\sim}{B}$(植物);u_7,u_8,u_9 属于$\underset{\sim}{A}$(或$\underset{\sim}{B}$)的程度为0.5,这表明u_7,u_8,u_9最具模糊性,它们既不能完全属于动物又不能完全属于植物.

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\,(\text{动物或植物})=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.9}{u_5}+\frac{0.9}{u_6}+\frac{0.5}{u_7}+\frac{0.5}{u_8}+\frac{0.5}{u_9}+\frac{0.7}{u_{10}}+\frac{0.7}{u_{11}}+\frac{0.8}{u_{12}}+\frac{0.8}{u_{13}}.$$

$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$的意义是表示"或是动物或是植物"的一类生物.在$U$中,只有$u_1,u_2,u_3,u_4$才是这一类生物.

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\,(\text{动物且植物})=\frac{0}{u_1}+\frac{0}{u_2}+\frac{0}{u_3}+\frac{0}{u_4}+\frac{0.1}{u_5}+\frac{0.1}{u_6}+\frac{0.5}{u_7}+\frac{0.5}{u_8}+\frac{0.5}{u_9}+\frac{0.2}{u_{10}}+\frac{0.2}{u_{11}}+\frac{0.1}{u_{12}}+\frac{0.1}{u_{13}}.$$

$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$的意义是表示"既是动物又是植物"的一类生物.$u_1,u_2,u_3,u_4$绝对不是这一类生物,只有$u_7,u_8,u_9$才是既像动物又像植物的一类生物.

$$\underset{\sim}{A}^C=\frac{0}{u_1}+\frac{0}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.1}{u_5}+\frac{0.1}{u_6}+\frac{0.5}{u_7}+\frac{0.5}{u_8}+\frac{0.5}{u_9}+\frac{0.8}{u_{10}}+\frac{0.8}{u_{11}}+\frac{0.9}{u_{12}}+\frac{0.9}{u_{13}}.$$

$\underset{\sim}{A}^C$的意义是:u_1,u_2绝对地不属于非动物一类,u_3,u_4绝对地属于非动物一类,$u_{10},u_{11},u_{12},u_{13}$属于非动物一类的程度较高,只有$u_7,u_8,u_9$最具模糊性.

由上述模糊集运算看出,u_7(粘菌),u_8(衣藻),u_9(眼虫藻)既不能划归动物也不能划归植物,u_7,u_8,u_9就是微生物.因此,有了模糊集的概念之后,生物学发展史在分类中存在的矛盾现象,得到了合乎情理的解释.

λ-截集的意义是:令$\lambda=0.9$,得截集$A_{0.9}=\{u_1,u_2,u_5,u_6\}$,$A_{0.9}$是在水平$\lambda=0.9$之下的一类动物,它们的性状是比较接近的.

分解定理的意义是:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}&=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\\&=1A_1\cup 0.9A_{0.9}\cup 0.6A_{0.6}\cup 0.5A_{0.5}\cup 0.2A_{0.2}\cup 0.1A_{0.1}\cup 0A_0.\end{aligned}$$

此式表明,$\underset{\sim}{A}$(动物)可由不同水平下的各类"动物"构成.

例1.6.2 "老年"的隶属函数 设论域$U=[0,200]$,在U上定义一个"老年"模糊集$\underset{\sim}{A}$.按现代社会的生活水平,不超过50岁肯定不是"老年",超过了70岁,大家会认为是"老年",而在年龄区间[50,70]则是一个过渡期.为了简化,可令$\underset{\sim}{A}(x)$是一个线性函数,且是x的增函数(即偏大型),如图1.13所示.其解析表达式为

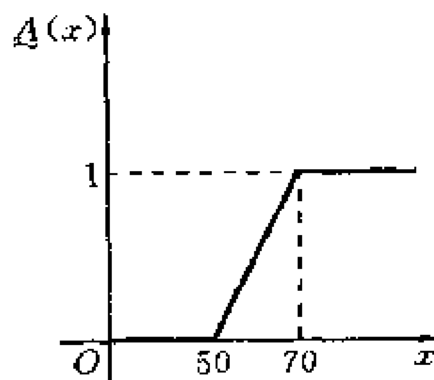


图1.13

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \frac{1}{20}(x-50), & 50<x\leqslant 70,\\ 1, & x>70.\end{cases}$$

当然,这里给出的"老年"隶属函数是比较粗糙的.

例1.6.3 隶属函数 设论域$U=\{$水稻$\}$,试用模糊统计试验建立$\underset{\sim}{A}=$"高产水稻"的隶属函数.由于全国各地的自然条件、生产水平不同,人们对模糊概念"高产"的理解也不一样.现在一般认为水稻(一季)亩产500 kg就算高产了.我们向来自全国各地农村的123名学生进行问卷调查,在对他们说明高产水稻的含义以后,请他们填写表1.6(注:1亩$=(10000/15)\mathrm{m}^2$).

表1.6

亩产/kg	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
在你认为的高产界限下打"√"															

在收回询问表后作出统计,结果如表1.7所示.

表1.7

亩产/kg	100	150	200	250	300	350	400	450
频　数	1	2	5	10	15	18	25	20
累计频数	1	3	8	18	33	51	76	96
累计频率	0.01	0.02	0.07	0.15	0.27	0.41	0.62	0.78
亩产/kg	500	550	600	650	700	750	800	
频　数	15	3	3	2	2	1	1	
累计频数	111	114	117	119	121	122	123	
累计频率	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	0.99	1	

按表1.7的累计频率可以作出$\underset{\sim}{A}$(高产水稻)的隶属函数(图1.14).

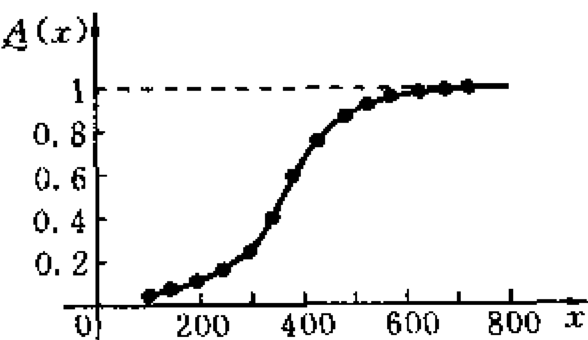


图1.14

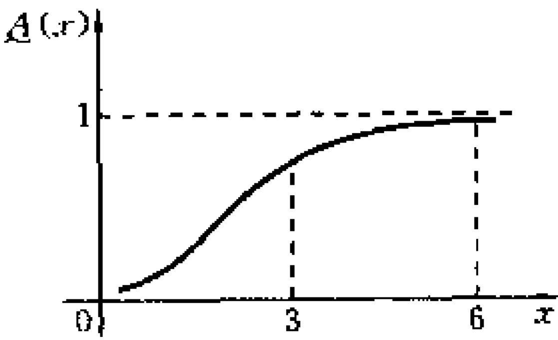


图1.15

例1.6.4 经济管理中的模糊集 在经济领域还没有引进模糊集时，人们只好把本来互相衔接的属性，如繁荣、衰退、萧条等分割开来. 某些经济学家用GNP持续下降6个月来规定"经济衰退". 这样一来，奇怪的现象就出现了：如果GNP从元旦开始持续下降，而今天正好是7月1日，那么，昨天经济形势还挺好，今天突然变成衰退.

事实上，"经济衰退"是一个模糊概念. 现在引进模糊集，在论域$U=\{GNP\}$上定义一个模糊集$\underset{\sim}{A}$="经济衰退". 采用指派方法，用x表示GNP下降的月数，容易选择偏大型模糊分布作为$\underset{\sim}{A}$(经济衰退)的隶属函数(图1.15)，即

$$\underset{\sim}{A}(x)=1-e^{-\frac{x^2}{3.6^2}}\quad(x>0).$$

习 题 1

1. 试举出几个你所学专业中的模糊概念或模糊性现象.

2. 写出下列集合U的幂集$\mathscr{T}(U)$：

(1) $U=\{0,1\}$； (2) $U=\{$红，绿，黄$\}$.

3. 用特征函数表示下列集合，并作特征函数图形：

(1) 大于2小于5的实数； (2) 小于10的素数；

(3) 圆$x^2+y^2=1$及圆内的点.

4. 给出实数集$\mathbf{R}$的子集$A=\{x|x>10\}$，$B=\{x|x<8\}$，求$\chi_{A\cup B}(6)$，$\chi_{A\cap B}(6)$，$\chi_{A^c}(6)$.

5. 设集合$E=\{x|x\in\mathbf{N}$，且$1\leqslant x\leqslant 10\}$，其中$\mathbf{N}$为自然数集合.

映射$f:E\to\mathbf{N}$，

$x\mapsto f(x)=x$ (x为奇数)，

$x\mapsto f(x)=x-1$ (x为偶数).

(1) 试确定映射的定义域A^*，值域B^*；

(2) 具体写出映射的集合G.

6. 设集合$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，f是如下定义的：

$$f:x\in A\to f(x)=\frac{6}{x}\in A.$$

(1) 试确定定义域； (2) 试求f的集合G； (3) 讨论f^{-1}.

7. 设$A=\{0,2,3,4,13,15\}$，$B=\{3,5,7,9,12,13\}$，记$a\in A$，$b\in B$，试用$A\times B$的子集表示关系$R=\{(a,b)|a$整除$b\}$.

8. 根据整数集$\mathbf{Z}$上定义的二元关系R，在表1.8中填上"是"或"否".

表 1.8

	二元关系	自反性	对称性	传递性
xRy:	x 整除 y			
xRy:	x,y 同为正或负			
xRy:	$\|x-y\|=1$			

9. 设 P_n 表示十进位制中 n 位自然数的集合. 试证：$P=\{P_1,P_2,P_3,\cdots\}$ 是自然数集 $\mathbf{N}$ 的一个划分.

10. 设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个格，在格中，若 $a\leqslant b\leqslant c$，试证：

(1) $a\vee b=b\wedge c$;　　(2) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)$.

11. 设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个格，试证对任意元素 $a,b,c\in L$，有

$$a\vee[(a\vee b)\wedge(a\vee c)]=(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

12. 试举出专业类群中三个模糊集合的例子.

13. 举出专业类群中的表现模糊概念的模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的例子，计算 $\underset{\sim}{A}^C$，说明 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^C\neq U$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^C\neq\varnothing$，并解释其实际意义.

14. 论域 $U=\{1,2,3,\cdots,10\}$，定义

$$\text{“大”}=\underset{\sim}{A}=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10},$$

$$\text{“小”}=\underset{\sim}{B}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5},$$

试求 $\underset{\sim}{C}$＝“不大”，$\underset{\sim}{D}$＝“不小”，$\underset{\sim}{E}$＝“或大或小”，$\underset{\sim}{F}$＝“不大也不小”.

15. 设 $X=[0,1]$，$\underset{\sim}{A}(x)=x$，试求 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^C)(x)$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^C)(x)$，并作出解释.

16. 设 $U=\mathbf{R}$（实数集），对 $x\in\mathbf{R}$，有

$$\underset{\sim}{A}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right],\quad \underset{\sim}{B}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right].$$

试求 $\underset{\sim}{A}^C$，$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，并画出图形.

17. 设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_8\}$（商品的商标），在 U 上定义模糊集

$$\underset{\sim}{A}(\text{商誉高})=(0.8,0.6,0.4,0.7,0.6,0.5,0.4,0.3),$$

$$\underset{\sim}{B}(\text{价格合理})=(0.7,0.4,0.6,0.8,0.4,0.5,0.6,0.7).$$

试求模糊集“商誉高且价格合理”、“商誉高或价格合理”.

18. 设6种商品的集合为 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$，$U$ 上的滞销商品模糊集为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}+\frac{0.4}{u_6},$$

脱销商品模糊集为

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0}{u_4}+\frac{0}{u_5}+\frac{0.05}{u_6},$$

畅销商品模糊集为

$$\underset{\sim}{C}=\frac{0}{u_1}+\frac{0.8}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.4}{u_5}+\frac{0.5}{u_6}.$$

(1) 求不滞销商品模糊集$\underset{\sim}{D}$. (2) 求$\underset{\sim}{D}$与$\underset{\sim}{C}$的关系.

(3) 求又滞销又畅销的商品模糊集.

(4) 当$\lambda=0.5$时,分别求滞销、脱销和畅销商品;当$\lambda=0.7$时的情形呢?

19. 设$U=\{a,b,c,d,e,f\}$,$\underset{\sim}{A}=\frac{0.9}{a}+\frac{0.5}{b}+\frac{0.7}{c}+\frac{1}{d}+\frac{0.6}{e}+\frac{0.2}{f}$,试求截集$A_{0.1}$,$A_{0.6}$,$A_{0.9}$.

20. 设U为无限域,$\underset{\sim}{A}=\int_U \frac{e^{-x^2}}{x}$,试求截集$A_{\frac{1}{e}}$,$A_1$,$A_0$.

21. 设$u\in U$,$\underset{\sim}{A}(u)=\frac{1}{1+4u^2}$,试求$A_{0.75}$.

22. 求证$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\forall\ \lambda\in[0,1]$,试证$A_\lambda=B_\lambda$.

23. 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$,$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$,$\lambda\in[0,1]$,试证$A_\lambda\subseteq B_\lambda$.

24. 设$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$,$\lambda_1<\lambda_2$,则$\lambda_1\ \underset{\sim}{A}\subseteq\lambda_2\ \underset{\sim}{A}$.

25. 举例说明$(\underset{\sim}{A}^C)_\lambda=(A_\lambda)^C$不成立.

26. 设论域$U=\{2,1,7,6,9\}$,$\underset{\sim}{A}=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{1}+\frac{0.5}{7}+\frac{0.9}{6}+\frac{1}{9}$,应用分解定理将模糊集$\underset{\sim}{A}$进行分解.

27. 已知$\underset{\sim}{A}$的λ-截集分别为

$$A_{0.1}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8\},\quad A_{0.2}=\{u_2,u_3,u_4,u_6,u_7,u_8\},$$
$$A_{0.3}=\{u_2,u_3,u_6,u_7\},\quad A_{0.9}=\{u_3,u_6,u_7\},\quad A_1=\{u_6\},$$

试用分解定理求出模糊集$\underset{\sim}{A}$.

28. 设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$和$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$,$f:X\to Y$.

$$f(x)=\begin{cases}y_1, & x=x_1,x_2,x_4,\\ y_2, & x=x_3,x_5,x_6.\end{cases}$$

再设两个模糊集

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{0.2}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}+\frac{0.4}{x_6},$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.6}{y_1}+\frac{0.9}{y_2}+\frac{0.8}{y_3}.$$

试利用扩张原理求出$f(\underset{\sim}{A})$,$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$,$f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))$及$f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))$.

29. 论域$U=[0,24]$表示时间(单位:h),试根据你的经验给出表现"拂晓"、"中午"、"傍晚"三个模糊概念的模糊集的隶属函数.

30. 在一个荧光屏上,用一光点的上下运动快慢来代表15种不同的运动速度,

记$V=\{1,2,\cdots,15\}$，主试者随机地给出15种速率让被试者按“快”、“中”、“慢”进行判断分类，每种速率共给出320次，判断结果如表1.9所示.

(1) 试用频率作为隶属度，确定模糊概念“快”、“中”、“慢”在V中所表现的模糊集；

(2) 画出上述变量的离散型分布密度函数图，作为它们在V上的隶属函数图；

(3) 将图中离散点用折线连起来，作为区间$V=[0,15]$上三个模糊集的隶属函数曲线.

表1.9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
快	0	0	0	0	0	0	0	0	0	84	218	261	320	320	320
中	0	0	0	15	190	319	320	320	320	236	102	59	0	0	0
慢	320	320	320	305	130	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

31. 隶属度 由于人种不同，地理条件的差异，人们对“高个子”的理解也不同. 设论域$U=\{人群\}$，在U上定义模糊集$\underset{\sim}{A}=$“高个子”，并设定身高1.80 m以上者必为高个子，而身高1.60 m以下者都不是高个子. 用x表示身高，给出$\underset{\sim}{A}$的隶属函数$\underset{\sim}{A}(x)$为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases} 0, & x<1.60, \\ 2\left(\dfrac{x-1.60}{0.2}\right)^2, & 1.60\leqslant x<1.70, \\ 1-2\left(\dfrac{x-1.80}{0.2}\right)^2, & 1.70\leqslant x<1.80, \\ 1, & x\geqslant 1.80. \end{cases}$$

试求$\underset{\sim}{A}(1.65)$，$\underset{\sim}{A}(1.70)$，$\underset{\sim}{A}(1.75)$，并解释其实际意义.

32. 设论域$U=\{0,1,2,3,\cdots,40\}$，u_i为一个人每周工作的时数，试用模糊集表示“失业”这个模糊概念，并画出隶属函数的图形(隶属度按各自理解的给出).

33. “文盲”是一个模糊概念. 按规定：识字500以下者为文盲，识字500～1000者为半文盲，识字1000以上者为非文盲. 设论域$U=\mathbf{R}$(实数集)，试建立模糊集$\underset{\sim}{A}=$“文盲”的隶属函数(并画图).

第2章 模糊聚类分析

在第1章曾介绍过经典集合上的关系，它实际上是一个直积上的子集.本章将介绍模糊关系.如前所述，有限论域上的关系可用布尔矩阵表示.同样，有限论域上的模糊关系也可以用所谓模糊矩阵来表示.由于矩阵具有直观性、可操作性，因此，首先介绍模糊矩阵的一些基本知识，然后介绍模糊关系(特别是模糊等价关系)，最后介绍它们的应用——模糊聚类分析.

2.1 模糊矩阵

2.1.1 模糊矩阵的概念

定义 2.1.1 如果对于任意$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$，都有$r_{ij}\in[0,1]$，则称矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$为模糊矩阵.例如

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0.1\\ 0.5 & 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$$

就是一个2×3模糊矩阵.若$r_{ij}\in\{0,1\}$，则模糊矩阵变成布尔矩阵.

为了方便，我们用$\mathscr{M}_{m\times n}$表示$m\times n$模糊矩阵全体，若$\boldsymbol{R}$是一个$m\times n$模糊矩阵，则记为$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{m\times n}$.

下面介绍几个特殊的模糊矩阵.

定义 2.1.2 矩阵

$$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{m\times n},\quad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{m\times n}$$

分别称为零矩阵、单位矩阵、全称矩阵.

2.1.2　模糊矩阵的运算及其性质

1. 模糊矩阵间的关系

定义 2.1.3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathscr{M}_{m\times n}$，记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，定义：

1° 相等　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$，$i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n$.

2° 包含　$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}\leqslant b_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$.

因此，对任何 $\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{m\times n}$，总有

$$\boldsymbol{O}\leqslant\boldsymbol{R}\leqslant\boldsymbol{U}.$$

2. 模糊矩阵的并、交、余运算

定义 2.1.4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathscr{M}_{m\times n}$，定义：

1° 并　$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\xlongequal{\text{def}}(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times n}$，

2° 交　$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\xlongequal{\text{def}}(a_{ij}\wedge b_{ij})_{m\times n}$，

3° 余　$\boldsymbol{A}^C\xlongequal{\text{def}}(1-a_{ij})_{m\times n}$.

例 2.1.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.1\\0.3 & 0.5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.7 & 0\\0.4 & 0.9\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\vee 0.7 & 0.1\vee 0\\0.3\vee 0.4 & 0.5\vee 0.9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.1\\0.4 & 0.9\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\wedge 0.7 & 0.1\wedge 0\\0.3\wedge 0.4 & 0.5\wedge 0.9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7 & 0\\0.3 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^C=\begin{pmatrix}1-1 & 1-0.1\\1-0.3 & 1-0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0.9\\0.7 & 0.5\end{pmatrix}.$$

模糊矩阵（$\cup,\cap,^C$）的性质如下.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\mathscr{M}_{m\times n}$，则有：

1° 幂等律　$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

2° 交换律　$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{A}$；

3° 结合律　$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$，　$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$；

4° 吸收律　$\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}$；

5° 分配律　$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C})$，

$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cup\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{C})\cap(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})$；

6° 0-1 律　$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$，　$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$，

$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，　$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}$；

7° 还原律　$(\boldsymbol{A}^C)^C=\boldsymbol{A}$；

8° 对偶律　$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})^C=\boldsymbol{A}^C\cap\boldsymbol{B}^C$，　$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})^C=\boldsymbol{A}^C\cup\boldsymbol{B}^C$.

此外,还有以下包含性质. 设$A,B,C,D\in\mathscr{M}_{m\times n}$,则有:

9° $A\leqslant B\Rightarrow A\cup B=B,A\cap B=A,A^C\geqslant B^C$;

10° $A\leqslant B,C\leqslant D\Rightarrow A\cup C\leqslant B\cup D,A\cap C\leqslant B\cap D$.

只证上述性质中的一部分,其余留给读者完成.

证 性质8° $\forall i,j$,有

$$(A\cup B)^C=(a_{ij}\vee b_{ij})^C_{m\times n}=[1-(a_{ij}\vee b_{ij})]_{m\times n}$$
$$=[(1-a_{ij})\wedge(1-b_{ij})]_{m\times n}=A^C\cap B^C.$$

性质9° 因为$A\leqslant B$,所以

$$a_{ij}\leqslant b_{ij},\quad 1-a_{ij}\geqslant 1-b_{ij},$$

故
$$A^C=(1-a_{ij})_{m\times n}\geqslant(1-b_{ij})_{m\times n}=B^C.$$

性质10° 因为$A\leqslant B,C\leqslant D$,所以

$$a_{ij}\leqslant b_{ij},\quad c_{ij}\leqslant d_{ij}.$$

由1.2节格的运算性质,有

$$a_{ij}\vee c_{ij}\leqslant b_{ij}\vee d_{ij},$$

所以
$$A\cup C\leqslant B\cup D;$$

又
$$a_{ij}\wedge c_{ij}\leqslant b_{ij}\wedge d_{ij},$$

所以
$$A\cap C\leqslant B\cap D.$$

注意 模糊矩阵的$\cup,\cap$运算不满足排中律,即$A\cup A^C\neq U$、$A\cap A^C\neq O$. 请研究例子$A=\begin{pmatrix}1&0.1&0.2\\0.8&0.5&0\end{pmatrix}$.

3. 模糊矩阵的合成运算

模糊矩阵的合成运算相当于矩阵的乘法运算.

定义2.1.5 设$A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$,称模糊矩阵

$$A\circ B=(c_{ij})_{m\times n}$$

为A与B的合成,其中$c_{ij}=\bigvee\limits_{k=1}^{s}(a_{ik}\wedge b_{kj})$.

例2.1.2 设

$$A=\begin{pmatrix}0.4&0.7&0\\1&0.8&0.5\end{pmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{pmatrix}1&0.7\\0.4&0.6\\0&0.3\end{pmatrix}_{3\times 2},$$

则
$$A\circ B=\begin{pmatrix}(0.4\wedge 1)\vee(0.7\wedge 0.4)\vee(0\wedge 0) & (0.4\wedge 0.7)\vee(0.7\wedge 0.6)\vee(0\wedge 0.3)\\ (1\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.4)\vee(0.5\wedge 0) & (1\wedge 0.7)\vee(0.8\wedge 0.6)\vee(0.5\wedge 0.3)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0.4&0.6\\1&0.7\end{pmatrix}_{2\times 2},$$

同样可算得
$$B\circ A=\begin{pmatrix}0.7&0.7&0.5\\0.6&0.6&0.5\\0.3&0.3&0.3\end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

可知，合成运算不满足交换律，即 $A\circ B\neq B\circ A$. 还应注意，同普通矩阵乘法一样，只有 A 的列数与 B 的行数相等时，合成运算 $A\circ B$ 才有意义.

定义 2.1.6(模糊方阵的幂)　设 $A\in\mathscr{M}_{n\times n}$，模糊方阵的幂定义为
$$A^2\overset{\text{def}}{=\!=}A\circ A,\ A^3\overset{\text{def}}{=\!=}A^2\circ A,\ \cdots,\ A^n\overset{\text{def}}{=\!=}A^{n-1}\circ A.$$

合成(∘)运算的性质如下：

1° 结合律　$(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$.

2°　$A^k\circ A^l=A^{k+l},\quad (A^m)^n=A^{m\cdot n}$.

3° 分配律　$A\circ(B\cup C)=(A\circ B)\cup(A\circ C)$,
$$(B\cup C)\circ A=(B\circ A)\cup(C\circ A).$$

关于并(∪)的分配律可以推广到无限多个并的运算中去，即
$$A\circ(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(A\circ B^{(t)}),$$
$$(\bigcup_{t\in T}B^{(t)})\circ A=\bigcup_{t\in T}(B^{(t)}\circ A).$$

4° 0-1 律　$O\circ A=A\circ O=O,\quad I\circ A=A\circ I=A$.

5°　$A\leqslant B,C\leqslant D\Longrightarrow A\circ C\leqslant B\circ D$.

6°　$A\leqslant B\Longrightarrow A\circ C\leqslant B\circ C,\quad C\circ A\leqslant C\circ B,\quad A^n\leqslant B^n$.

只证上述性质中的一部分，其余留给读者完成.

证　性质5°　因为
$$A\leqslant B,\quad C\leqslant D,$$
所以 $\forall\, i,j,k$，有
$$a_{ik}\leqslant b_{ik},\quad c_{kj}\leqslant d_{kj},$$
于是 $\forall\, k$，有　$a_{ik}\wedge c_{kj}\leqslant b_{ik}\wedge d_{kj},\quad \bigvee_k(a_{ik}\wedge c_{kj})\leqslant\bigvee_k(b_{ik}\wedge d_{kj})$,

因此
$$A\circ C\leqslant B\circ D.$$

性质6°　用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$A\leqslant B$ 显然成立.

设 $n=k$ 时，$A^k\leqslant B^k$ 成立，要证 $n=k+1$ 命题成立.

事实上，$A\leqslant B, A^k\leqslant B^k$，由性质5°得
$$A^k\circ A\leqslant B^k\circ B,\quad A^{k+1}\leqslant B^{k+1},$$
故
$$A^n\leqslant B^n.$$

关于合成(∘)运算要注意两点：

1° 关于交(∩)的分配律不成立，即
$$(A\cap B)\circ C\neq(A\circ C)\cap(B\circ C).$$

请研究例子

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$(A\cap B)\circ C=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix},\quad (A\circ C)\cap(B\circ C)=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix},$$

可见
$$(A\cap B)\circ C\neq(A\circ C)\cap(B\circ C).$$

2° $A\circ A\neq A$,而有 $A\circ A\overset{\text{def}}{=\!=}A^2$(幂的定义).

4. 模糊矩阵的转置

模糊矩阵的转置定义与线性代数中矩阵的转置定义是相同的.

定义 2.1.7 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,称 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ij}^{\mathrm{T}})_{n\times m}$ 为 A 的转置矩阵,其中

$$a_{ij}^{\mathrm{T}}=a_{ji},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n.$$

模糊矩阵的转置有如下性质:

1° $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

2° $(A\cup B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\cup B^{\mathrm{T}}$, $(A\cap B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\cap B^{\mathrm{T}}$;

3° $(A\circ B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\circ A^{\mathrm{T}}$, $(A^n)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^n$;

4° $(A^{C})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{C}$;

5° $A\leqslant B\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}\leqslant B^{\mathrm{T}}$.

上述性质的证明比较容易,只证性质3°,其余留给读者完成.

证 设
$$A=(a_{ik})_{m\times s},\quad B=(b_{kj})_{s\times n},$$

则
$$A_{m\times s}\circ B_{s\times n}=C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中
$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{s}(a_{ik}\wedge b_{kj}).$$

一方面,$(A\circ B)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}{}_{n\times m}=(c_{ij}^{\mathrm{T}})_{n\times m}=(c_{ji})_{n\times m}$,因为按定义,$c_{ij}^{\mathrm{T}}=c_{ji}$.

记 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ik}^{\mathrm{T}})_{s\times m}$,其中 $a_{ik}^{\mathrm{T}}=a_{ki}$;$B^{\mathrm{T}}=(b_{kj}^{\mathrm{T}})_{n\times s}$,其中 $b_{kj}^{\mathrm{T}}=b_{jk}$.

另一方面,

$$B^{\mathrm{T}}\circ A^{\mathrm{T}}=\left(\bigvee_{k=1}^{s}(b_{ik}^{\mathrm{T}}\wedge a_{kj}^{\mathrm{T}})\right)_{n\times m}=\left(\bigvee_{k=1}^{s}(b_{ki}\wedge a_{jk})\right)_{n\times m}=\left(\bigvee_{k=1}^{s}(a_{jk}\wedge b_{ki})\right)_{n\times m}=(c_{ji})_{n\times m},$$

故
$$(A\circ B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\circ A^{\mathrm{T}}.$$

用数学归纳法证明 $(A^n)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^n$.

当 $n=1$ 时,$A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}$.

当 $n=2$ 时,$(A^2)^{\mathrm{T}}=(A\circ A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\circ A^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^2$.

设当 $n=k$ 时,$(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k$ 成立,则当 $n=k+1$ 时,有

$$(A^{k+1})^{\mathrm{T}}=(A^k\circ A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\circ(A^k)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\circ(A^{\mathrm{T}})^k=(A^{\mathrm{T}})^{k+1}.$$

因此
$$(A^n)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^n.$$

5. 模糊矩阵的 λ-截矩阵

定义2.1.8　设$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$,对于任意的$\lambda\in[0,1]$,称$A_\lambda=(a_{ij}^{(\lambda)})$为模糊矩阵$A=(a_{ij})$的$\lambda$-截矩阵,其中

$$a_{ij}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & a_{ij}\geqslant\lambda,\\ 0, & a_{ij}<\lambda.\end{cases}$$

显然,截矩阵为布尔矩阵.

例2.1.3　设
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.3 & 0.8 & 1\end{pmatrix},$$
则当$\lambda=0.5$时的λ-截矩阵

$$A_{0.5}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

截矩阵的性质如下:$\forall\ \lambda\in[0,1]$,有

1°　$A\leqslant B\Leftrightarrow A_\lambda\leqslant B_\lambda$;

2°　$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$,　$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$;

3°　$(A\circ B)_\lambda=A_\lambda\circ B_\lambda$;

4°　$(A^{\mathrm{T}})_\lambda=(A_\lambda)^{\mathrm{T}}$.

只证明性质1°和性质3°,性质2°和性质4°的证明留给读者完成.

证　性质1°　因为$A\leqslant B$,所以$\forall\ i,j$,有

$$a_{ij}\leqslant b_{ij},\quad \forall\ \lambda\in[0,1].$$

若$\lambda\leqslant a_{ij}\leqslant b_{ij}$,则$a_{ij}^{(\lambda)}=b_{ij}^{(\lambda)}=1$;若$a_{ij}<\lambda\leqslant b_{ij}$,则$a_{ij}^{(\lambda)}=0,b_{ij}^{(\lambda)}=1$;若$a_{ij}\leqslant b_{ij}<\lambda$,则$a_{ij}^{(\lambda)}=b_{ij}^{(\lambda)}=0$,

综上所述$a_{ij}^{(\lambda)}\leqslant b_{ij}^{(\lambda)}$,故$A_\lambda\leqslant B_\lambda$.

已知$\forall\ \lambda\in[0,1]$,$A_\lambda\leqslant B_\lambda$.假定$A\leqslant B$不成立,$\exists\ (i_0,j_0)$,使$a_{i_0j_0}>b_{i_0j_0}$.取$\lambda=a_{i_0j_0}$,$\lambda>b_{i_0j_0}$,且$a_{i_0j_0}^{(\lambda)}=1$,$b_{i_0j_0}^{(\lambda)}=0$,即$a_{i_0j_0}^{(\lambda)}>b_{i_0j_0}^{(\lambda)}$,$A_\lambda\leqslant B_\lambda$不成立,与已知条件矛盾,故$A\leqslant B$.

性质3°　记

$$A=(a_{ik})_{m\times s},\quad B=(b_{kj})_{s\times n},\quad A\circ B=C=(c_{ij})_{m\times n},$$

$\forall\ i,j,k$,有

$$c_{ij}^{(\lambda)}=1\Leftrightarrow c_{ij}\geqslant\lambda\Leftrightarrow\mathop{\dot{\bigvee}}_{k=1}(a_{ik}\wedge b_{kj})\geqslant\lambda$$
$$\Leftrightarrow(\exists\ k)(a_{ik}\wedge b_{kj})\geqslant\lambda\Leftrightarrow(\exists\ k)(a_{ik}\geqslant\lambda\text{ 且 }b_{kj}\geqslant\lambda)$$

$$\Leftrightarrow (\exists\ k)(a_{ik}^{(\lambda)} = 1 \text{ 且 } b_{kj}^{(\lambda)} = 1) \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{s} (a_{ik}^{(\lambda)} \wedge b_{kj}^{(\lambda)}) = 1;$$

$$c_{ij}^{(\lambda)} = 0 \Leftrightarrow c_{ij} < \lambda \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{s} (a_{ik} \wedge b_{kj}) < \lambda$$

$$\Leftrightarrow (\forall\ k)(a_{ik} \wedge b_{kj}) < \lambda \Leftrightarrow (\forall\ k)(a_{ik} < \lambda \text{ 或 } b_{kj} < \lambda)$$

$$\Leftrightarrow (\forall\ k)(a_{ik}^{(\lambda)} = 0 \text{ 或 } b_{kj}^{(\lambda)} = 0) \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{s} (a_{ik}^{(\lambda)} \wedge b_{kj}^{(\lambda)}) = 0.$$

所以
$$c_{ij}^{(\lambda)} = \bigvee_{k=1}^{s} (a_{ik}^{(\lambda)} \wedge b_{kj}^{(\lambda)}).$$

2.1.3 模糊矩阵的基本定理

定义2.1.9 设$A \in \mathscr{M}_{n\times n}$,若模糊矩阵$A$满足$A \geqslant I$($A$的主对角线元素$a_{ii}=1$),则称$A$为自反矩阵.

例如
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

A是模糊自反矩阵.

定义2.1.10 设$A \in \mathscr{M}_{n\times n}$,若模糊矩阵$A$满足$A^{\mathrm{T}} = A$($\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$),则称$A$为对称矩阵.

例如,$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$是模糊对称矩阵.

定义2.1.11 设$A \in \mathscr{M}_{n\times n}$,若模糊矩阵$A$满足$A^2 \leqslant A$($\Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik} \wedge a_{kj}) \leqslant a_{ij}$),则称$A$为模糊传递矩阵.

例如
$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \leqslant A,$$

A是模糊传递矩阵.

定义2.1.12 设$Q, S, A \in \mathscr{M}_{n\times n}$,满足:

1° $S \geqslant A$($S^2 \leqslant S$),

2° $\forall\ Q \geqslant A$($Q^2 \leqslant Q$),总有$Q \geqslant S$,

则称S为A的传递闭包,记为$t(A)$,即$S = t(A)$.

定义2.1.12的意思是:包含A而且被任何包含A的传递矩阵所包含的传递矩阵称为A的传递闭包,或包含A的最小的模糊传递矩阵称为A的传递闭包.显然,A的传递闭包$t(A)$满足:

1° $t(A) \circ t(A) \leqslant t(A)$ (传递性);

2° $t(A) \geqslant A$;

3° $\forall\, Q \geqslant A(Q \circ Q \leqslant Q) \Rightarrow Q \geqslant t(A)$ （最小性）.

定理 2.1.1 设 $A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ 是自反矩阵，则有

$$A \leqslant A^2 \leqslant A^3 \leqslant \cdots \leqslant A^{n-1} \leqslant A^n \leqslant \cdots.$$

证 因为 A 是自反矩阵，$A \geqslant I$，所以由合成运算的性质4°和性质6°，得

$$I \circ A \leqslant A \circ A, \quad 即 \quad I \leqslant A \leqslant A^2;$$

继续下去，得

$$I \leqslant A \leqslant A^2 \leqslant A^3, \cdots,$$

故

$$I \leqslant A \leqslant A^2 \leqslant A^3 \leqslant \cdots \leqslant A^{n-1} \leqslant A^n \leqslant \cdots.$$

定理 2.1.2 设 $A \in \mathscr{M}_{n\times n}$，则传递闭包 $t(A) = A \cup A^2 \cup \cdots \cup A^n \cup \cdots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$.

证 1° $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k \circ \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A^j = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(A^k \circ \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A^j) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(A^k \circ A^j)$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A^{k+j} = \bigcup_{m=2}^{\infty} A^m \leqslant \bigcup_{m=1}^{\infty} A^m;$$

2° $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k \geqslant A$;

3° $\forall\, Q \geqslant A$，由合成（$\circ$）运算的性质6°，$\forall\, k \in \mathbf{N}$，有 $Q^k \geqslant A^k$. 又因为

$$Q^2 \leqslant Q, \quad Q^3 = Q^2 \circ Q \leqslant Q \circ Q \leqslant Q, \quad \cdots, \quad Q^k \leqslant Q,$$

所以 $\forall\, k \in \mathbf{N}$，有 $Q \geqslant Q^k \geqslant A^k$，故

$$Q \geqslant \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k.$$

定理2.1.2的重要性在于给出了任意模糊矩阵 A 的传递闭包的表达式. 但是，实际操作是无法实现的，因为这要求作无穷多次并运算. 因此，人们设法改进了这一结论.

定理 2.1.3 设 $A \in \mathscr{M}_{n\times n}$，则传递闭包 $t(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A^k$.（证明略.）

定理2.1.3表明，当 A 是 n 阶矩阵时，至多用 n 次并运算便可表示出 A 的传递闭包. 以后将会看到，对所谓模糊相似矩阵，其传递闭包的表达式会更简单些，也便于操作.

2.2 模糊关系

与模糊子集是经典集合的推广一样，模糊关系是普通关系的推广. 例如，父子关系是普通关系，而两人之间彼此“熟悉”的关系则是模糊关系.

2.2.1 模糊关系的定义

定义2.2.1 设论域 U, V，称 $U \times V$ 的一个模糊子集 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$ 为 U 到 V 的

模糊关系,记为$U \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} V$.其隶属函数为映射

$$\mathscr{M}_{\underset{\sim}{R}}: U \times V \to [0,1]$$

$$(x,y) \mapsto \mathscr{M}_{\underset{\sim}{R}}(x,y) \xlongequal{\text{记为}} \underset{\sim}{R}(x,y),$$

并称隶属度$\underset{\sim}{R}(x,y)$为(x,y)关于模糊关系$\underset{\sim}{R}$的相关程度.

例2.2.1 模糊关系 设身高论域$U=\{140,150,160,170,180\}$(单位:cm),体重论域$V=\{40,50,60,70,80\}$(单位:kg).表2.1给出了人的身高与体重之间的模糊关系.

表2.1

U	V				
	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

$\underset{\sim}{R}(160,50)=0.8$,$\underset{\sim}{R}(180,60)=0.2$,这表明身高160 cm与体重50 kg的相关程度为80%,身高180 cm与体重60 kg的相关程度为20%.

例2.2.2 模糊关系 设$X=Y$是实数集,直积$X\times Y$是整个平面.关系R:$x>y$是一个普通关系,即平面上的集合R,如图2.1所示.

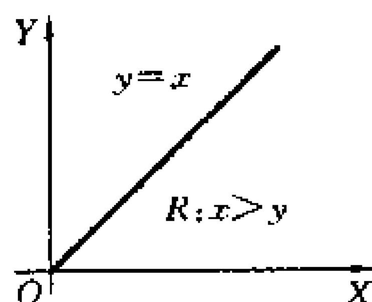


图2.1

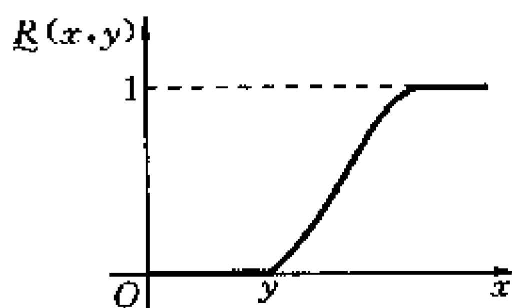


图2.2

现在考虑"x远远大于y"的关系,这是一个模糊关系$\underset{\sim}{R}$,记为$\underset{\sim}{R} \xlongequal{\text{def}}$"$x \gg y$",其隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{R}(x,y)=\begin{cases} 0, & x \leqslant y, \\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & x>y, \end{cases}$$

如图2.2所示.如:当$x=1000$,$y=100$时,$\underset{\sim}{R}(x,y)=0.999$;当$x=20$,$y=10$时,$\underset{\sim}{R}(x,y)=0.5$;当$x=20$,$y=18$时,$\underset{\sim}{R}(x,y)=0.0385$.

由于模糊关系$\underset{\sim}{R}$就是直积$U\times V$的一个模糊子集,因此,模糊关系同样具有模

糊子集的运算及性质.

定义 2.2.2　设$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{R}_1$，$\underset{\sim}{R}_2$为U到V的模糊关系，定义：

1° 相等　$\underset{\sim}{R}_1=\underset{\sim}{R}_2\Leftrightarrow\underset{\sim}{R}_1(x,y)=\underset{\sim}{R}_2(x,y)$；

2° 包含　$\underset{\sim}{R}_1\subseteq\underset{\sim}{R}_2\Leftrightarrow\underset{\sim}{R}_1(x,y)\leqslant\underset{\sim}{R}_2(x,y)$；

3° 并　$\underset{\sim}{R}_1\cup\underset{\sim}{R}_2$，其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{R}_1\cup\underset{\sim}{R}_2)(x,y)=\underset{\sim}{R}_1(x,y)\vee\underset{\sim}{R}_2(x,y);$$

4° 交　$\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2$，其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2)(x,y)=\underset{\sim}{R}_1(x,y)\wedge\underset{\sim}{R}_2(x,y);$$

5° 余　$\underset{\sim}{R}^C$，其隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}^C(x,y)=1-\underset{\sim}{R}(x,y).$$

$(\underset{\sim}{R}_1\cup\underset{\sim}{R}_2)(x,y)$表示$(x,y)$对模糊关系"$\underset{\sim}{R}_1$或$\underset{\sim}{R}_2$"的相关程度，$(\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2)(x,y)$表示$(x,y)$对"$\underset{\sim}{R}_1$且$\underset{\sim}{R}_2$"的相关程度，$\underset{\sim}{R}^C(x,y)$表示$(x,y)$对"非$\underset{\sim}{R}$"的相关程度.

对于有限论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$V=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，则U到V的模糊关系$\underset{\sim}{R}$可用$m\times n$模糊矩阵表示，即

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n},$$

其中$r_{ij}=\underset{\sim}{R}(x_i,y_j)\in[0,1]$表示$(x_i,y_j)$对模糊关系$\underset{\sim}{R}$的相关程度.

例2.2.1中的身高与体重之间的模糊关系$\underset{\sim}{R}$可用模糊矩阵$\boldsymbol{R}$表示，即

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1\end{pmatrix}.$$

这样一来，在有限论域之间，普通关系与布尔矩阵建立了1－1对应关系，模糊关系与模糊矩阵建立了1－1对应关系. 于是，以后总是把相互对应的模糊关系和模糊矩阵视为等同的，而且由于模糊矩阵比较直观，又便于运算，故总是将模糊关系转化为模糊矩阵.

在模糊关系的运算中，除了上述按模糊集进行的以外，还有其独特的运算——模糊关系的合成.

2.2.2　模糊关系的合成

定义2.2.3　设有X，Y，Z三个论域，$\underset{\sim}{R}_1$是X到Y的模糊关系，$\underset{\sim}{R}_2$是Y到Z的模糊关系，定义$\underset{\sim}{R}_1$与$\underset{\sim}{R}_2$的合成$\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2$是$X$到$Z$的一个模糊关系，其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2)(x,y)=\bigvee_{y\in Y}(\underset{\sim}{R}_1(x,y)\wedge\underset{\sim}{R}_2(y,z)).$$

若$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(X\times X)$,定义$\underset{\sim}{R}^2=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}^n=\underset{\sim}{R}^{n-1}\circ\underset{\sim}{R}$.

当论域为有限时,模糊关系的合成转化为模糊矩阵的合成.

设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$,$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$为有限论域.

$$\boldsymbol{R}_1=(a_{ik})_{m\times s}\in\mathscr{F}(X\times Y),\quad \boldsymbol{R}_2=(b_{kj})_{s\times n}\in\mathscr{F}(Y\times Z),$$

则$\boldsymbol{R}_1$与$\boldsymbol{R}_2$的合成为

$$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2=C=(c_{ij})_{m\times n}\in\mathscr{F}(X,Z),$$

其中$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{s}(a_{ik}\wedge b_{kj})$.

例 2.2.3 生物群落种群间的模糊关系 设生物群落论域$X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$U=\{a,b,c\}$,$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$. 以$X\xrightarrow{\underset{\sim}{R}_1}U$表示两生物群落种群间的密切关系,记为

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0.2&0.9&0.5\\0.4&0.1&0.8\\0.6&0.7&0.3\end{pmatrix}.$$

例如,其中$r'_{13}=0.5$表示种x_1与种c之间的密切程度.

以$U\xrightarrow{\underset{\sim}{R}_2}Y$表示另两生物群落种群间的密切关系,记为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0.9&0.5&0.2\\0.4&0.8&0.7\\0.6&0.3&0.1\end{pmatrix}.$$

例如,其中$r''_{23}=0.7$表示种b与y_3之间的密切程度,则生物群落X与Y之间的密切程度是指模糊关系的合成,即模糊矩阵的合成$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2$,且

$$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0.2&0.9&0.5\\0.4&0.1&0.8\\0.6&0.7&0.3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.9&0.5&0.2\\0.4&0.8&0.7\\0.6&0.3&0.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5&0.8&0.7\\0.6&0.4&0.2\\0.6&0.7&0.7\end{pmatrix},$$

即

$\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.5	0.8	0.7
x_2	0.6	0.4	0.2
x_3	0.6	0.7	0.7

这就表明了生物群落$X=\{x_1,x_2,x_3\}$与$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$之间的密切程度.

例 2.2.4 设$\underset{\sim}{R}_1$是$X\times Y$上的模糊关系,其隶属函数为$\underset{\sim}{R}_1(x,y)=\mathrm{e}^{-k(x-y)^2}$;$\underset{\sim}{R}_2$是$Y\times Z$上的模糊关系,其隶属函数为$\underset{\sim}{R}_2(y,z)=\mathrm{e}^{-k(y-z)^2}$($k>0$常数). 试求模糊关系$\underset{\sim}{R}_1$与$\underset{\sim}{R}_2$的合成$\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2$.

解 由定义 2.2.3 得

$$(\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}[\underset{\sim}{R}_1(x,y)\wedge\underset{\sim}{R}_2(y,z)]=\bigvee_{y\in Y}[\mathrm{e}^{-k(x-y)^2}\wedge\mathrm{e}^{-k(y-z)^2}].$$

先求两曲线的交点(图2.3),有

$$e^{-k(x-y)^2}=e^{-k(y-z)^2},$$

$$(x-y)^2=(y-z)^2.$$

求得交点横坐标$y^*=\frac{x+z}{2}=a$(另一解舍去).

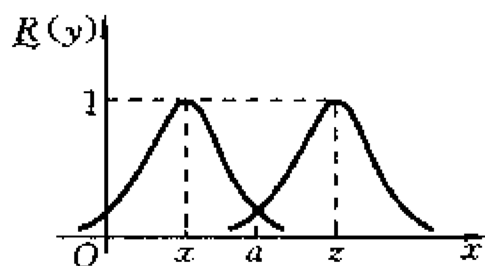


图2.3

当$y=y^*$时,

$$\bigvee_{y\in Y}(e^{-k(x-y)^2}\wedge e^{-k(y-z)^2})=e^{-k(x-y^*)^2},$$

故
$$(\underset{\sim}{R}_1\circ\underset{\sim}{R}_2)(x,z)=e^{-k\left(x-\frac{x+z}{2}\right)^2}=e^{-k\left(\frac{x-z}{2}\right)^2}.$$

模糊关系合成具有如下性质(这些性质在有限论域情况下,就是模糊矩阵合成运算的性质):

1° 结合律 $(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\circ\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\circ(\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{C})$;

2° 分配律 $\underset{\sim}{A}\circ(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{C})$,

$(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})\circ\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{A})\cup(\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{A})$;

3° $(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})^{\mathrm{T}}=\underset{\sim}{B}^{\mathrm{T}}\circ\underset{\sim}{A}^{\mathrm{T}}$;

4° $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{D}\Rightarrow\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{D}$;

5° $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Rightarrow\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A}^n\subseteq\underset{\sim}{B}^n$.

2.2.3 模糊等价关系

在1.2节中曾讲过,论域X上的普通等价关系可以确定X的一个划分(即X的一个分类).同样,模糊等价关系也可用于分类.

定义2.2.4 若模糊关系$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{T}(X\times X)$满足:

1° 自反性 $\underset{\sim}{R}(x,x)=1$,

2° 对称性 $\underset{\sim}{R}(x,y)=\underset{\sim}{R}(y,x)$,

3° 传递性 $\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{R}$,

则称$\underset{\sim}{R}$是X上的一个模糊等价关系.其中隶属度$\underset{\sim}{R}(x,y)$表示(x,y)的相关程度.

2.3 模糊等价矩阵

当论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为有限论域时,U的模糊等价关系可表示为$n\times n$模糊等价矩阵.

2.3.1 模糊等价矩阵及其性质

定义2.3.1 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{n\times n}$,$\boldsymbol{I}$为单位矩阵,若$\boldsymbol{R}$满足:

1° 自反性 $I\leqslant R(\Leftrightarrow r_{ii}=1)$,

2° 对称性 $R^{\mathrm{T}}=R(\Leftrightarrow r_{ij}=r_{ji})$,

3° 传递性 $R\circ R\leqslant R(\Leftrightarrow \bigvee\limits_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})\leqslant r_{ij})$,

则称 R 为模糊等价矩阵.

由定义 2.3.1 可知,因自反性 $r_{ii}=1$ 成立,所以

$$\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})\geqslant r_{ii}\wedge r_{ij}=r_{ij},$$

又因传递性 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})\leqslant r_{ij}$ 成立,故有

$$\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})=r_{ij}.$$

即

$$R\circ R=R.$$

例 2.3.1 设 $U=\{x_1,x_2,x_3\}$,$R=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}$ 具有自反性、对称性,又

$$R\circ R=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=R,$$

故 R 是模糊等价矩阵.

模糊等价矩阵具有如下定理所述的性质.

定理 2.3.1 R 是模糊等价矩阵 $\Leftrightarrow\forall\ \lambda\in[0,1]$,$R_\lambda$ 是等价的布尔矩阵.

证 1° R 的自反性,$I\leqslant R\Leftrightarrow\forall\ \lambda\in[0,1]$,$I_\lambda\leqslant R_\lambda$,即 $I\leqslant R_\lambda$(2.1 节截矩阵性质 1°),表明 R_λ 具有自反性;

2° R 的对称性,$R^{\mathrm{T}}=R\Leftrightarrow(R^{\mathrm{T}})_\lambda=R_\lambda$,即 $(R_\lambda)^{\mathrm{T}}=R_\lambda$(2.1 节截矩阵性质 4°),表明 R_λ 具有对称性;

3° R 的传递性,$R\circ R\leqslant R\Leftrightarrow R_\lambda\circ R_\lambda\leqslant R_\lambda$(2.1 节截矩阵的性质 3°及性质 1°),表明 R_λ 具有传递性.

定理 2.2.1 的重要性在于将模糊等价矩阵转化为等价的布尔矩阵⇔有限论域上的普通等价关系,而等价关系是可以分类的.因此,当 λ 在 $[0,1]$ 上变动时,由 R_λ 得到不同的分类.这些分类之间的联系则由下面的定理给出.

定理 2.3.2 设 $R\in\mathscr{M}_{n\times n}$ 是模糊等价矩阵,则对 $\lambda,\mu\in[0,1]$,且 $\lambda<\mu$,R_μ 所决定的分类中的每一个类是 R_λ 决定的分类中的某个类的子类.

证 设

$$R_\lambda=(r_{ij}^{(\lambda)})_{n\times n},\quad R_\mu=(r_{ij}^{(\mu)})_{n\times n},$$

因 $\forall\ \lambda,\mu\in[0,1]$,$\lambda<\mu$,有 $r_{ij}^{(\mu)}=1\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\mu\Rightarrow r_{ij}>\lambda\Leftrightarrow r_{ij}^{(\lambda)}=1$.

这就是说,如果 i,j 按 R_μ 分在一类,则按 R_λ 也必分在一类,即 R_μ 所决定的分类中的每个类是 R_λ 决定的分类中的某个类的子类.

定理2.3.2表明，当$\lambda<\mu$时，$\boldsymbol{R}_\mu$的分类是$\boldsymbol{R}_\lambda$分类的加细.因此，当λ由1变到0时，$\boldsymbol{R}_\lambda$的分类由细变粗，形成一个动态的聚类图，称之为模糊分类.下面举例说明这种动态的聚类过程.

例2.3.2　设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}.$$

容易验证，$r_{ii}=1$，$r_{ij}=r_{ji}$，$\boldsymbol{R}$具有自反性与对称性.又

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R},$$

所以$\boldsymbol{R}$具有传递性，故$\boldsymbol{R}$是模糊等价矩阵.

取$\lambda=1$，得
$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

U分为5类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_3\}$，$\{x_4\}$，$\{x_5\}$.

取$\lambda=0.8$，得
$$\boldsymbol{R}_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

U分为4类：$\{x_1,x_3\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_5\}$.

取$\lambda=0.6$，得
$$\boldsymbol{R}_{0.6}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

U分为3类：$\{x_1,x_3\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4,x_5\}$.

取 $\lambda=0.5$，得
$$R_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\end{pmatrix},$$
U 分为 2 类：$\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_2\}$.

取 $\lambda=0.4$，得
$$R_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$
U 分为 1 类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

于是，得到动态的聚类图(图 2.4).

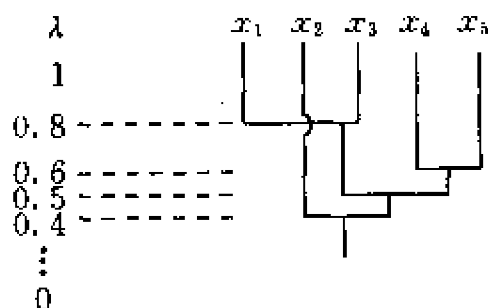


图 2.4

聚类图的直观解释是：严格地说($\lambda=1$)，各元素自成一类. 如果条件放宽一些，不要求完全相同，只要"八分像"($\lambda=0.8$)，则 x_1 与 x_3 归成一类，其他 x_2,x_4,x_5 达不到要求仍各成一类. 把条件再放宽一点，只要"六分像"($\lambda=0.6$)，则 x_4 与 x_5 可归成一类，x_2 仍单列，整体分成三类. 而当把条件放宽到"四分像"($\lambda=0.4$)，即 40% 的相似都算相似，此时所有元素归成一类.

需要指出的是，在实际应用问题中要建立一个模糊等价关系或模糊等价矩阵往往是不容易的，这主要是由于传递性不易满足. 但是，要建立一个自反的、对称的模糊关系或自反的、对称的模糊矩阵(称之为模糊相似矩阵)，则是比较容易的. 然后将它改造成满足传递性而又保持自反性与对称性的模糊等价关系或模糊等价矩阵，就可以进行分类. 下面就讨论这方面的问题.

2.3.2　模糊相似矩阵及其性质

定义 2.3.2　若模糊关系 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{T}(U\times U)$ 满足：

1° 自反性　$\underset{\sim}{R}(x,x)=1$，

2° 对称性　$\underset{\sim}{R}(x,y)=\underset{\sim}{R}(y,x)$，

则称 $\underset{\sim}{R}$ 为 U 上的模糊相似关系. 其中隶属度 $\underset{\sim}{R}(x,y)$ 表示 x,y 的相似程度.

例 2.3.3　模糊相似关系　设论域 $U=\{x_1,x_2\}$ 表示两个人的集合. 两个人之间的彼此"熟悉"的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 就是一种模糊相似关系，因为 $\underset{\sim}{R}(x_1,x_1)=1$，$\underset{\sim}{R}(x_1,x_2)=\underset{\sim}{R}(x_2,x_1)$，但是 $\underset{\sim}{R}$ 不满足传递性，故 $\underset{\sim}{R}$ 不是模糊等价关系.

当U为有限论域时，模糊相似关系$\underset{\sim}{R}$可用模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$表示.

定义2.3.3 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{n\times n}$，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，若$\boldsymbol{R}$满足：

1° 自反性 $\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{R}(\Leftrightarrow r_{ii}=1)$，

2° 对称性 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}(\Leftrightarrow r_{ij}=r_{ji})$，

则称$\boldsymbol{R}$为模糊相似矩阵.

例2.3.4 设

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.5\\ 0.2 & 1 & 0.8\\ 0.5 & 0.8 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.3\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\\ 0.3 & 0.7 & 0\end{pmatrix},$$

则$\boldsymbol{R}$是模糊相似矩阵. $\boldsymbol{Q}$具有对称性，但不具有自反性，故$\boldsymbol{Q}$不是模糊相似矩阵.

例2.3.5 在育种工作中，以某个品种(系)作材料，考察它的n个性状，则由遗传标准差与遗传协方差的估计值可求得遗传相关系数的估计值：

$$\hat{r}_{ij}=\frac{\hat{\sigma}_{g_{ij}}}{\hat{\sigma}_{g_i}\cdot\hat{\sigma}_{g_j}}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中$\hat{\sigma}^2_{g_i}$，$\hat{\sigma}^2_{g_j}$分别为第i个、第j个性状的遗传方差的估计值，$\hat{\sigma}_{g_{ij}}$为第i，j个性状的遗传协方差的估计值.

显然$|\hat{r}_{ij}|\in[0,1]$. 由于$\hat{r}_{ij}$中可能出现负数，则可令$r_{ij}=\dfrac{\hat{r}_{ij}+1}{2}$，则$r_{ij}\in[0,1]$. 此时得到的遗传相关系数矩阵$\boldsymbol{R}$就是一个模糊相似矩阵，即

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n}\\ r_{n1} & \cdots & r_{n,n-1} & 1\end{pmatrix},$$

其中$r_{ii}=1$，$r_{ij}=r_{ji}$.

模糊相似矩阵具有如下定理所述的性质.

定理2.3.3 设$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{m\times m}$是模糊相似矩阵，则$\forall k\in\mathbf{N}$，$\boldsymbol{R}^k$也是模糊相似矩阵.

证 用数学归纳法证明.

当$k=1$时，$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}$是模糊相似矩阵.

设$k=n$时，$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^n$是模糊相似矩阵，要证$k=n+1$时，$\boldsymbol{R}^{n+1}$也是模糊相似矩阵，即需证：1° 自反性 $r_{ii}^{(n+1)}=1$；2° 对称性 $r_{ij}^{(n+1)}=r_{ji}^{(n+1)}$. 事实上，有：

1° 因为
$$\boldsymbol{R}^{n+1}=\boldsymbol{R}^n\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}^n,$$

所以
$$r_{ij}^{(n+1)}=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik}^{(n)}\wedge r_{kj}),$$

令$j=i$，则
$$r_{ii}^{(n+1)}=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik}^{(n)}\wedge r_{ki})\geqslant r_{ii}^{(n)}\wedge r_{ii}=1\wedge 1=1.$$

又$r_{ii}^{(n+1)}\leqslant 1$，故有$r_{ii}^{(n+1)}=1$.

2° $r_{ij}^{(n+1)}=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik}^{(n)}\wedge r_{kj})=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{ki}^{(n)}\wedge r_{jk})=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{jk}\wedge r_{ki}^{(n)})=r_{ji}^{(n+1)}$.

因此,$\boldsymbol{R}^{n+1}$是模糊相似矩阵.

$\forall k$(正整数),$\boldsymbol{R}^k$ 也是模糊相似矩阵.

前面曾经指出,我们希望能将模糊相似矩阵改造成模糊等价矩阵,以便进行分类. 根据2.1节模糊矩阵的基本理论,只要能求出模糊相似矩阵的传递闭包就行了,下面的定理2.3.4回答了这一问题.

定理2.3.4 设$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{n\times n}$是模糊相似矩阵,则存在一个最小自然数$k$ ($k\leqslant n$),使得传递闭包$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k$,对于一切大于$k$的自然数$l$,恒有$\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^k$. 此时,$t(\boldsymbol{R})$为模糊等价矩阵.

证 因为$\boldsymbol{R}$是模糊相似矩阵(当然具有自反性),根据定理2.1.1,有$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{A}^2\leqslant\boldsymbol{A}^3\leqslant\cdots$. 又根据定理2.1.3,$t(\boldsymbol{R})=\bigcup_{m=1}^{n}\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^n$.

由于n为有限数,因此存在最小自然数$k\leqslant n$,使得

$$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k.$$

$\forall l>k$,有

$$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k\subseteq\boldsymbol{R}^l\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^m=t(\boldsymbol{R}),$$

因此,$\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^k$.

再根据定理2.3.3,$\boldsymbol{R}^k$是模糊相似矩阵,传递闭包$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k$具有传递性,故$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^k$是模糊等价矩阵.

定理2.3.4表明,通过求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$,可将模糊相似矩阵改造成为模糊等价矩阵,它具有传递性,同时又保留了自反性与对称性. 下面介绍一个实用的简捷方法——二次方法,求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$.

从模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$出发,依次求二次方,即

$$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^4\to\cdots\to\boldsymbol{R}^{2^i}\to\cdots,$$

当第一次出现$\boldsymbol{R}^k\circ\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^k$时(表明$\boldsymbol{R}^k$具有传递性),$\boldsymbol{R}^k$就是所求的传递闭包$t(\boldsymbol{R})$.

例2.3.6 设$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.2\\0.1&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}$,求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$.

解 容易验证,$\boldsymbol{R}$是模糊相似矩阵,用二次方法求其传递闭包$t(\boldsymbol{R})$.

$$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.2\\0.1&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0.1&0.2\\0.1&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0.2&0.2\\0.2&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}^2,$$

$$\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}1&0.2&0.2\\0.2&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&0.2&0.2\\0.2&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0.2&0.2\\0.2&1&0.3\\0.2&0.3&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}^2,$$

故传递闭包 $$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^2=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\0.2 & 1 & 0.3\\0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}.$$

由定理2.3.4还可知道，若经过i次求得$n\times n$模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$的传递闭包$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{2^i}$，则必有$\boldsymbol{R}^{2^i}\leqslant\boldsymbol{R}^n$，即$2^i\leqslant n$，$i\leqslant\log_2 n$. 因此，至多计算$[\log_2 n]+1$步，便可求得$t(\boldsymbol{R})$.

2.4 模糊聚类分析方法

在科学技术、经济管理中常常需要按一定的标准(相似程度或亲疏关系)进行分类. 例如，根据生物的某些性状可对生物分类，根据土壤的性质可对土壤分类等. 对所研究的事物按一定标准进行分类的数学方法称为聚类分析，它是多元统计“物以类聚”的一种分类方法. 由于科学技术、经济管理中的分类界限往往不分明，因此采用模糊聚类方法通常比较符合实际.

2.4.1 模糊聚类分析的一般步骤

1. 第一步：数据标准化

(1) 数据矩阵

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为被分类的对象，每个对象又由m个指标表示其性状，即

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

于是，得到原始数据矩阵为

$$\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m}\\x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm}\end{pmatrix}.$$

(2) 数据标准化

在实际问题中，不同的数据一般有不同的量纲. 为了使有不同的量纲的量也能进行比较，通常需要对数据作适当的变换. 但是，即使这样，得到的数据也不一定在区间[0,1]上. 因此，这里所说的数据标准化，就是要根据模糊矩阵的要求，将数据压缩到区间[0,1]上.

通常需要作如下几种变换.

1) 平移·标准差变换

$$x'_{ik}=\frac{x_{ik}-\overline{x_k}}{s_k}\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m),$$

其中
$$\overline{x_k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik},\quad s_k=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x_k})^2}.$$

经过变换后,每个变量的均值为0,标准差为1,且消除了量纲的影响.但是,这样得到的x'_{ik}还不一定在区间[0,1]上.

2) 平移·极差变换

$$x''_{ik}=\frac{x'_{ik}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x'_{ik}\}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x'_{ik}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x'_{ik}\}}\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

显然有$0\leqslant x''_{ik}\leqslant 1$,而且也消除了量纲的影响.

3) 对数变换

$$x'_{ik}=\lg x_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m),$$

取对数以缩小变量间的数量级.

2. 第二步:标定(建立模糊相似矩阵)

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}$,依照传统聚类方法确定相似系数,建立模糊相似矩阵,x_i与x_j的相似程度$r_{ij}=R(x_i,x_j)$.确定$r_{ij}=R(x_i,x_j)$的方法主要借用传统聚类分析的相似系数法、距离法以及其他方法.具体用什么方法,可根据问题的性质,选取下列公式之一计算r_{ij}.

(1) 相似系数法

1) 数量积法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ \dfrac{1}{M}\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\neq j,\end{cases}$$

其中
$$M=\max_{i\neq j}\left(\sum_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}\right).$$

显然$|r_{ij}|\in[0,1]$,若r_{ij}中出现负值,也可采用以下方法将r_{ij}压缩到[0,1]上:令$r'_{ij}=\dfrac{r_{ij}+1}{2}$,则$r'_{ij}\in[0,1]$.

当然也可用上述的平移·极差变换.

2) 夹角余弦法

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}x_{jk}^2}}.$$

3）相关系数法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-\overline{x_i}||x_{jk}-\overline{x_j}|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-\overline{x_i})^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk}-\overline{x_j})^2}},$$

其中
$$\overline{x_i}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{ik},\quad \overline{x_j}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{jk}.$$

4）指数相似系数法

$$r_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\exp\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{(x_{ik}-x_{jk})^2}{s_k^2}\right],$$

其中
$$s_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x}_{ik})^2,$$

而
$$\overline{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

需要注意的是，相关系数法与指数相似系数法中的统计指标的内容是不同的.

在相关系数法中，$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$中的$m$个坐标是取自同一母体$X_i$的$m$个样本，$r_{ij}$表示两个母体$X_i$与$X_j$的相关程度. 反映在原始数据矩阵$\mathscr{X}$上，当$\mathscr{X}$的不同的行是来自不同的母体时，采用相关系数法. 这一点，由$\overline{x}_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}$也可以看出.

在指数相似系数法中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是取自同一m维母体$X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$的n个m维样本. 这时r_{ij}反映的是两个样本间的相似程度. 反映在原始数据矩阵$\mathscr{X}$上，当$\mathscr{X}$的不同的列是来自不同的母体时，采用指数相似系数法. 这一点，由$\overline{x_k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$也可以看出.

5）最大最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})}.$$

6）算术平均最小法

$$r_{ij}=\frac{2\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})}.$$

7) 几何平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}\cdot x_{jk}}}.$$

(上述5)、6)、7)三种方法均要求 $x_{ij}>0$,否则,也要作适当变换.)

(2) 距离法

1) 直接距离法

$$r_{ij}=1-cd(x_i,x_j),$$

其中 c 为适当选取的参数,它使得 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$, $d(x_i,x_j)$ 表示 x_i 与 x_j 的距离. 经常采用的距离有:

① 海明(Hamming)距离

$$d(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|;$$

② 欧几里得(Euclid)距离

$$d(x_i,x_j)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-x_{jk})^2};$$

③ 切比雪夫(Chebyshev)距离

$$d(x_i,x_j)=\bigvee_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|.$$

2) 倒数距离法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ \dfrac{M}{d(x_i,x_j)}, & i\neq j,\end{cases}$$

其中 M 为适当选取的参数,使得 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$.

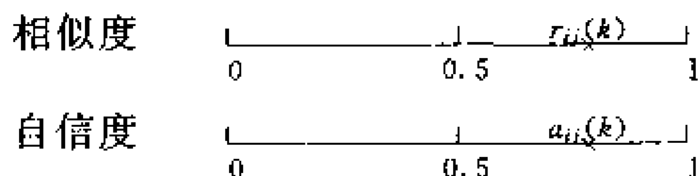
3) 指数距离法

$$r_{ij}=\exp[-d(x_i,x_j)].$$

上述三种距离法中若采用海明距离,则又分别称为绝对值减数法、绝对值倒数法、绝对值指数法. 附录 B 中给出了用上述各种方法建立模糊相似矩阵的 MATLAB 源代码程序 F_JlR.m.

(3) 主观评分法

请专家或有实际经验者直接对 x_i 与 x_j 的相似程度评分,作为 r_{ij} 的值. 例如,请 N 个专家组成专家组 $\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$,每一位专家 p_k $(k=1,2,\cdots,N)$ 考虑对象 x_i 与 x_j 的相似程度,在有刻度的单位线段上标记:



其中，$r_{ij}(k)$为第k个专家p_k所做标记的相似度，$a_{ij}(k)$为p_k对自己所做标记的自信度（有把握的程度），则相似系数定义为

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{N}a_{ij}(k)\cdot r_{ij}(k)}{\sum_{k=1}^{N}a_{ij}(k)}.$$

究竟选择上述诸方法中的哪一种，需要根据问题的性质及使用方便来选择.

3. 第三步：聚类（求动态聚类图）

(1) 基于模糊等价矩阵聚类方法

1) 传递闭包法

根据标定所得的模糊矩阵，只是一个模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$，不一定具有传递性，即$\boldsymbol{R}$不一定是模糊等价矩阵. 为了进行分类，还需要将$\boldsymbol{R}$改造成模糊等价矩阵$\boldsymbol{R}^*$. 根据定理2.3.4，用二次方法求$\boldsymbol{R}$的传递闭包$t(\boldsymbol{R})$，$t(\boldsymbol{R})$就是所求的模糊等价矩阵$\boldsymbol{R}^*$，即$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^*$. 再让$\lambda$由大变到小，就可形成动态聚类图.

例 2.4.1 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$表示农业小区域，已知每个小区域的气候取决于4个指标：热量、水分、霜冻、霜雹，即

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3},x_{i4})\quad(i=1,2,\cdots,10),$$

其数值如表2.2所示.

表 2.2

指标	农业小区域									
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
热量(x_{i1})	1	2	2	3	3	5	6	6	5	4
水分(x_{i2})	3.5	2.5	3.5	3	3	0.5	1.5	1.5	3	3
霜冻(x_{i3})	1	2	1	3	1	5	4	4	2	1
霜雹(x_{i4})	0	2	1	1	1	2	0	1	2	2

由于所给数据$x_{ij}>0$，且没有单位，所以直接选取数量积法建立模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$，无需作变换.

① 用公式

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{4}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\neq j,\end{cases}$$

选取M使得对一切i,j，有$0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$. 在本例中取$M=55.25$. 于是，得到的模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.231 & 0.276 & 0.299 & 0.262 & 0.213 & 0.276 & 0.276 & 0.317 & 0.281 \\ 0.231 & 1 & 0.303 & 0.389 & 0.317 & 0.457 & 0.430 & 0.466 & 0.462 & 0.389 \\ 0.276 & 0.303 & 1 & 0.371 & 0.335 & 0.339 & 0.385 & 0.403 & 0.443 & 0.389 \\ 0.299 & 0.389 & 0.371 & 1 & 0.398 & 0.606 & 0.624 & 0.643 & 0.579 & 0.471 \\ 0.262 & 0.317 & 0.335 & 0.398 & 1 & 0.425 & 0.480 & 0.498 & 0.507 & 0.434 \\ 0.213 & 0.457 & 0.339 & 0.606 & 0.425 & 1 & 0.919 & 0.955 & 0.733 & 0.552 \\ 0.276 & 0.430 & 0.385 & 0.624 & 0.480 & 0.919 & 1 & 0.982 & 0.769 & 0.588 \\ 0.276 & 0.466 & 0.403 & 0.643 & 0.498 & 0.955 & 0.982 & 1 & 0.805 & 0.624 \\ 0.317 & 0.462 & 0.443 & 0.579 & 0.507 & 0.733 & 0.769 & 0.805 & 1 & 0.633 \\ 0.281 & 0.389 & 0.389 & 0.471 & 0.434 & 0.552 & 0.588 & 0.624 & 0.633 & 1 \end{pmatrix}.$$

② 用二次方法求 $\boldsymbol{R}$ 的传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$：$\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}^2\rightarrow\boldsymbol{R}^4$，$\boldsymbol{R}^4\circ\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{R}^4$，得模糊等价矩阵 $t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{R}^*$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 & 0.317 \\ 0.317 & 1 & 0.443 & 0.466 & 0.466 & 0.466 & 0.466 & 0.466 & 0.466 & 0.466 \\ 0.317 & 0.443 & 1 & 0.443 & 0.443 & 0.443 & 0.443 & 0.443 & 0.443 & 0.443 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 1 & 0.507 & 0.643 & 0.643 & 0.643 & 0.643 & 0.633 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.507 & 1 & 0.507 & 0.507 & 0.507 & 0.507 & 0.507 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.643 & 0.507 & 1 & 0.955 & 0.955 & 0.805 & 0.633 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.643 & 0.507 & 0.955 & 1 & 0.982 & 0.805 & 0.633 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.643 & 0.507 & 0.955 & 0.982 & 1 & 0.805 & 0.633 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.643 & 0.507 & 0.805 & 0.805 & 0.805 & 1 & 0.633 \\ 0.317 & 0.466 & 0.443 & 0.633 & 0.507 & 0.633 & 0.633 & 0.633 & 0.633 & 1 \end{pmatrix}.$$

③ 将 λ 由大到小进行聚类.

取 $\lambda=1$，U 分为 10 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_6\}$，$\{x_7\}$，$\{x_8\}$，$\{x_9\}$，$\{x_{10}\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.982$，U 分为 9 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_6\}$，$\{x_7,x_8\}$，$\{x_9\}$，$\{x_{10}\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.955$，U 分为8 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_6,x_7,x_8\}$，$\{x_9\}$，$\{x_{10}\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.805$，U 分为 7 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_6,x_7,x_8,x_9\}$，$\{x_{10}\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.633$，U 分为 5 类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.443$，U 分为 2 类：$\{x_1\}$，$\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_5,x_3\}$.

取 $\lambda=0.317$，U 为 1 类：$\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_5,x_3\}$.

动态聚类图如图 2.5 所示.

2）布尔矩阵法[6]

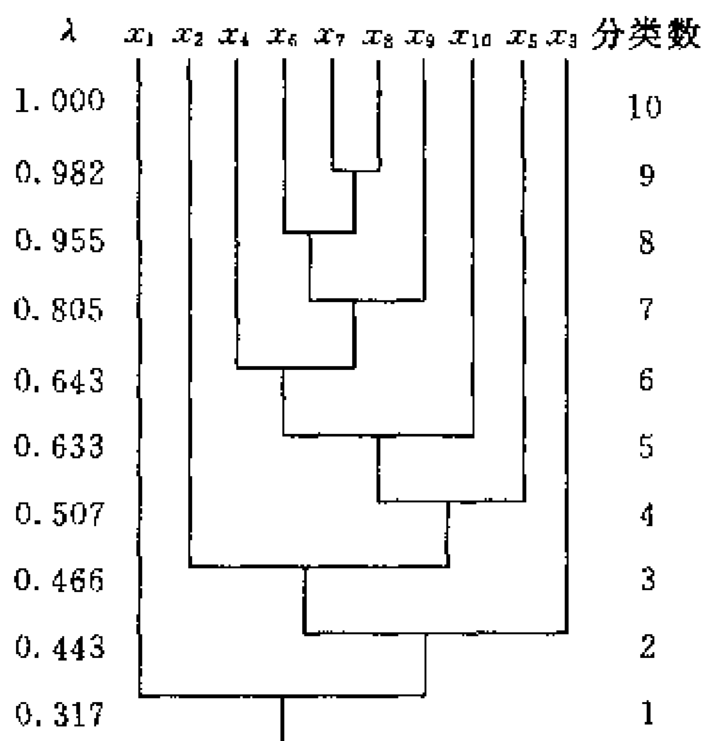


图2.5

布尔矩阵法的基本思想是:设$\boldsymbol{R}$是论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的模糊相似矩阵,若要得到U的元素在λ水平上的分类,则可直接由相似矩阵$\boldsymbol{R}$作其λ-截矩阵$\boldsymbol{R}_\lambda$,显然$\boldsymbol{R}_\lambda$为布尔矩阵.若$\boldsymbol{R}_\lambda$为等价矩阵,则由定理2.3.1知,$\boldsymbol{R}$也为等价矩阵,当然也可以分类;若$\boldsymbol{R}_\lambda$不是等价矩阵,则按下述方法将$\boldsymbol{R}_\lambda$改造成一个等价的布尔矩阵,然后再分类.

布尔矩阵法的理论依据是下面的定理.

定理2.4.1 设$\boldsymbol{R}$是$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的一个相似的布尔矩阵,则$\boldsymbol{R}$具有传递性(当$\boldsymbol{R}$是等价布尔矩阵时)⇔矩阵$\boldsymbol{R}$在任一排列下的矩阵都没有形如$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$的特殊子矩阵.

此定理证明从略,它提供了从矩阵上判别一个布尔矩阵是否为等价矩阵的方法.

布尔矩阵法的具体步骤如下:

1° 求模糊相似矩阵的λ-截矩阵$\boldsymbol{R}_\lambda$.

2° 若$\boldsymbol{R}_\lambda$按定理2.4.1判定为等价的,则由$\boldsymbol{R}_\lambda$可得U在λ水平上的分类.若$\boldsymbol{R}_\lambda$按定理2.4.1判定为不是等价的,则$\boldsymbol{R}_\lambda$在某一排列下含有上述形式的特殊子矩阵,此时只要将$\boldsymbol{R}_\lambda$中上述形式的特殊子矩阵的"0"一律改为"1",直到不再产生上述形式的特殊子矩阵为止即可.如此得到的$\boldsymbol{R}_\lambda^*$为等价矩阵.因此,由$\boldsymbol{R}_\lambda^*$可得在λ水平上的分类.

例2.4.2 环境单元分类 每个环境单元可以包括空气、水分、土壤、作物4个要素,环境单元的污染状况由污染物在4个要素中含量的超限度来描述,设论域U

$=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$为5个单元,它们的污染数据如表2.3所示.

表2.3

环境单元	指标			
	空气(x_{i1})	水分(x_{i2})	土壤(x_{i3})	作物(x_{i4})
x_1	5	5	3	2
x_2	2	3	4	5
x_3	5	5	2	3
x_4	1	5	3	1
x_5	2	4	5	1

按绝对值减数法进行标定,取$c=0.1$,由

$$r_{ij}=1-0.1\times\sum_{k=1}^{4}|x_{ik}-x_{jk}|,$$

得模糊相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1\\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6\\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1\end{pmatrix}.$$

用布尔矩阵法分类:

取$\lambda=1$,得
$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

U分为5类:$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$.

取$\lambda=0.8$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

U分为4类:$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$.

取$\lambda=0.6$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.6}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

U可分为3类:$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$.

取 $\lambda=0.5$，得
$$R_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$
先互换 $R_{0.5}$ 的第1、第2行，再互换第1、第2列，得
$$R'_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}x_2\\x_1\\x_3\\x_4\\x_5\end{matrix},$$
$$\begin{matrix}x_2&x_1&x_3&x_4&x_5\end{matrix}$$
再按布尔矩阵法进行改造，得
$$R^*_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix},$$
U 分为2类：$\{x_2\}$，$\{x_1,x_3,x_4,x_5\}$.

取 $\lambda=0.4$，得
$$R_{0.4}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix},$$
互换 $R_{0.4}$ 的第1、第2行，得
$$R'_{0.4}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix},$$
再按布尔矩阵法进行改造，得
$$R^*_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$
U 为1类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

注意 1° 布尔矩阵法中"在任一排列下"是指按行或按列的任一排列,在按 $\lambda=0.5$ 水平分类时就看到了这一点.

2° 布尔矩阵 $\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_{0.8},\boldsymbol{R}_{0.6}$ 按定理 2.3.1 都是等价的布尔矩阵,所以可以直接分类.

可以证明:布尔矩阵法与传递闭包法的分类结果是一致的.

(2) 直接聚类法

所谓直接聚类法,是指在建立模糊相似矩阵之后,不去求传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$,也不用布尔矩阵法,而是直接从模糊相似矩阵出发求得聚类图. 其步骤如下.

1° 取 $\lambda_1=1$(最大值),对每个 x_i 作相似类 $[x_i]_R$,且

$$[x_i]_R=\{x_j|r_{ij}=1\},$$

即将满足 $r_{ij}=1$ 的 x_i 与 x_j 放在一类,构成相似类. 相似类与等价类的不同之处是,不同的相似类可能有公共元素,即可出现

$$[x_i]_R=\{x_i,x_k\},\quad [x_j]_R=\{x_j,x_k\},\quad [x_i]\cap[x_j]\neq\varnothing.$$

此时只要将有公共元素的相似类合并,即可得 $\lambda_1=1$ 水平上的等价分类.

2° 取 λ_2 为次大值,从 $\boldsymbol{R}$ 中直接找出相似程度为 λ_2 的元素对 (x_i,x_j)(即 $r_{ij}=\lambda_2$),将对应于 $\lambda_1=1$ 的等价分类中 x_i 所在的类与 x_j 所在的类合并,将所有这些情况合并后,即得对应于 λ_2 的等价分类.

3° 取 λ_3 为第三大值,从 $\boldsymbol{R}$ 中直接找出相似程度为 λ_3 的元素对 (x_i,x_j)(即 $r_{ij}=\lambda_3$),类似地将对应于 λ_2 的等价分类中 x_i 所在类与 x_j 所在类合并,将所有这些情况合并后,即得对应 λ_3 的等价分类.

4° 依此类推,直到合并到 U 成为一类为止.

例 2.4.3 设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$,给出模糊相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.8 & 1 & 0.2 & 0.8 & 0.5 & 0.3\\ & 1 & 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.3\\ & & 1 & 0.7 & 1 & 0.6 & 0.5\\ & & & 1 & 0.5 & 0.8 & 0.6\\ & & & & 1 & 0.2 & 0.7\\ & & & & & 1 & 0.8\\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

(因为 $r_{ij}=r_{ji}$,故只写出主对角线上方的元素 r_{ij}).

取 $\lambda_1=1$,由于 $r_{13}=r_{35}=1$,$\{x_1,x_3\}$,$\{x_3,x_5\}$ 为相似类,有公共元素 x_3 的相似类 $\{x_1,x_3,x_5\}$,因此,在 $\lambda_1=1$ 水平上的等价类为

$$\{x_1,x_3,x_5\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_6\},\{x_7\}.$$

取 $\lambda_2=0.8$($\boldsymbol{R}$ 中的次大值),由于 $r_{12}=r_{15}=r_{46}=r_{67}=0.8$,$\{x_1,x_2\}$,$\{x_1,x_5\}$,$\{x_4,x_6\}$,$\{x_6,x_7\}$ 为相似类,合并为等价类 $\{x_1,x_2,x_5\}$,$\{x_4,x_6,x_7\}$. 再与在 $\lambda_1=1$ 水

平上的等价类中 x_1 所在类与 x_2 所在类合并，即得在 $\lambda_2=0.8$ 水平上的等价类为

$$\{x_1,x_2,x_3,x_5\},\{x_4,x_6,x_7\}.$$

取 $\lambda=0.7$（$\boldsymbol{R}$ 中的第三大值），由于 $r_{34}=r_{25}=r_{57}=0.7$，故应将 $\lambda_2=0.8$ 水平上的等价类中 x_3 所在类与 x_4 所在类合并，即得在 $\lambda=0.7$ 水平上的等价类为

$$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}.$$

动态聚类图如图 2.6 所示.

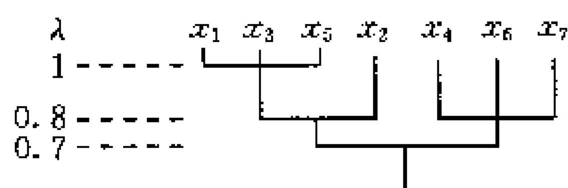


图 2.6

直接聚类法与传递闭包法、布尔矩阵法所得的结果是一样的. 直接聚类法明显简便一些. 建议读者用直接聚类法再做一下例 2.4.1 和例 2.4.2.

下面介绍直接聚类法的图形化与表格化方法，即最大树法和编网法.

(3) 最大树法

所谓最大树法，就是画出以被分类元素为顶点，以相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的元素 r_{ij} 为权重的一棵最大的树，取定 $\lambda\in[0,1]$，砍断权重低于 λ 的枝，得到一个不连通的图，各个连通的分支便构成了在 λ 水平上的分类.

下面介绍求最大树的克鲁克(Kruskal)法.

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，先画出所有顶点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$，从模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中按 r_{ij} 从大到小的顺序依次画枝，并标上权重，要求不产生圈，直到所有顶点连通为止，这就得到一棵最大树(最大树可以不唯一).

例 2.4.4　用最大树法求例 2.4.2 环境单元的分类.

解　论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，模糊相似矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.8&0.5&0.3\\0.1&1&0.1&0.2&0.4\\0.8&0.1&1&0.3&0.1\\0.5&0.2&0.3&1&0.6\\0.3&0.4&0.1&0.6&1\end{pmatrix},$$

画出最大树，如图 2.7 所示.

砍去最大树权重低于 λ 的枝，即得在 λ 水平上的分类.

取 $\lambda=1$，U 分为 5 类：$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$，如图 2.8 所示.

取 $\lambda=0.8$，U 分为 4 类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$，如图 2.9 所示.

取 $\lambda=0.6$，U 分为 3 类：$\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$，如图 2.10 所示.

取 $\lambda=0.5$，U 分为 2 类：$\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2\}$，如图 2.11 所示.

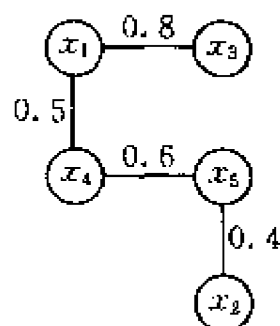


图 2.7

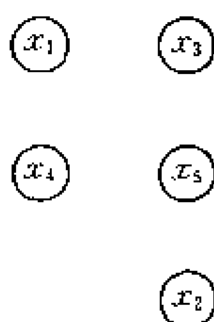


图 2.8

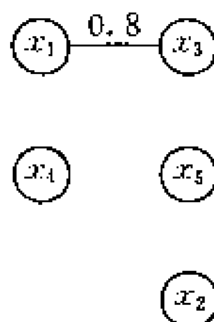


图 2.9

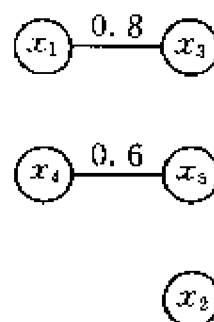


图 2.10

取 $\lambda=0.4$,U 为 1 类:$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,如图 2.7 所示.

最大树法所得的结果与布尔矩阵法分类结果是一致的.

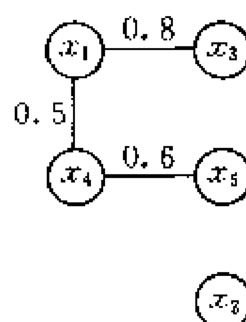


图 2.11

(4) 编网法

所谓编网法,就是取定 λ 水平,对模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 作 λ-截矩阵 $\boldsymbol{R}_\lambda$,在 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 的主对角线上填入元素的符号.在主对角线下方,以星号"*"代替 1,以空格代替 0.再由"*"所在位置向上引纵线,向右引横线.凡能互相联系的点均属于同类,从而实现了分类.

例 2.4.5　用编网法求例 2.4.2 环境单元的分类.

解　取 $\lambda=0.6$,得 λ-截矩阵

$$\boldsymbol{R}_{0.6}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

再按编网法,如表2.4 所示,把元素分为3 类:$\{x_1,x_3\}$,$\{x_2\}$,$\{x_4,x_5\}$.与最大树法的分类结果一致.

表 2.4

$R_{0.6}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_1				
x_2	|	x_2			
x_3	* ——	——	x_3		
x_4				x_4	
x_5				* ——	x_5

上述聚类方法各有优劣.使用传递闭包法分类,当矩阵阶数较高时,手工计算量较大,但在计算机上还是容易实现的(附录 B 中 F_JlDtjl.m).因此,人们还是乐于使用它.当矩阵阶数不高时,后面几个方法均较直观,也便于操作,适合推广应用.

2.4.2　最佳阈值λ的确定

在模糊聚类分析中，对于各个不同的$\lambda\in[0,1]$，可得到不同的分类，从而形成一种动态聚类图，这对全面了解样本的分类情况是比较形象和直观的．但许多实际问题需要选择某个阈值λ，确定样本的一个具体分类．这就提出了如何确定阈值λ的问题．现介绍下面两种方法：

1° 按照实际需要，在动态聚类图中，调整λ的值以得到适当的分类，而不需要事先准确地估计好样本应分成几类．当然，也可由具有丰富经验的专家结合专业知识来确定阈值λ，从而得出在λ水平上的等价分类．

2° 用F统计量确定λ最佳值．

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为样本空间（样本总数为n），而每个样本x_i有m个特征（即由试验或观察得到的m个数据）：$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$ $(i=1,2,\cdots,n)$．于是得到原始数据矩阵，如表2.5所示，其中$\overline{x_k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$ $(k=1,2,\cdots,m)$，$\bar{\boldsymbol{x}}$称为总体样本的中心向量．

表2.5

样本	指	标				
	1	2	…	k	…	m
x_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	…	x_{1m}
x_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}	…	x_{2m}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ik}	…	x_{im}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nk}	…	x_{nm}
$\bar{\boldsymbol{x}}$	$(\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	…	$\overline{x_k}$	…	$\overline{x_m})$

设对应于λ值的分类数为r，第j类的样本数为n_j，第j类的样本记为：$\boldsymbol{x}_1^{(j)},\boldsymbol{x}_2^{(j)},\cdots,\boldsymbol{x}_{n_j}^{(j)}$，第$j$类的聚类中心为向量$\bar{\boldsymbol{x}}^{(j)}=(\overline{x}_1^{(j)},\overline{x}_2^{(j)},\cdots,\overline{x}_m^{(j)})$，其中$\overline{x}_k^{(j)}$为第$k$个特征的平均值，即

$$\overline{x}_k^{(j)}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ik}^{(j)}\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

作F统计量

$$F=\frac{\sum_{j=1}^{r}n_j\|\bar{\boldsymbol{x}}^{(j)}-\bar{\boldsymbol{x}}\|^2/(r-1)}{\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}\|\boldsymbol{x}_i^{(j)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{(j)}\|^2/(n-r)},\tag{2.1}$$

其中
$$\| \bar{x}^{(j)} - \bar{x} \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (\bar{x}_k^{(j)} - \bar{x}_k)^2}$$
为$\bar{x}^{(j)}$与$\bar{x}$间的距离，$\| x_i^{(j)} - \bar{x}^{(j)} \|$为第$j$类中第$i$个样本$x_i^{(j)}$与其中心$\bar{x}^{(j)}$间的距离. 称式(2.1)为$F$统计量，它是遵从自由度为$r-1, n-r$的$F$分布. 它的分子表征类与类之间的距离，分母表征类内样本间的距离. 因此，F值越大，说明类与类之间的距离越大；类与类间的差异越大，分类就越好.

如果$F > F_\alpha(r-1, n-r)$ $(\alpha = 0.05)$，则根据数理统计方差分析理论知道类与类之间差异是显著的，说明分类比较合理. 如果满足不等式$F > F_\alpha(r-1, n-r)$的F值不止一个，则可进一步考查差比例式$(F - F_\alpha)/F_\alpha$的大小，从较大者中找一个满意的F值就行了.

2.5　模糊聚类分析的应用

从目前文献看，模糊聚类分析是模糊数学中应用最多、最活跃的一个分支，几乎涉及各个学科领域，科技工作者在其中做了大量的工作. 限于篇幅，下面仅举若干例子介绍模糊聚类在科学技术及经济管理方面的应用.

例 2.5.1　**DNA 序列分类***　2000 年 6 月，人类基因组计划中DNA 全序列草图完成，在完成精确的全序列草图后，人类将拥有一本记录着自身生老病死及遗传进化的全部信息的“天书”. 这本大自然写成的“天书”是由 4 个字符 A、T、C、G 按一定顺序排成的长约 30 亿个字符的序列，其中没有“断句”也没有标点符号. 除了这4 个字符表示4 种碱基以外，人们对它包含的“内容”知之甚少，“天书”难以读懂. 破译这部世界上最巨量信息的“天书”是 21 世纪最重要的任务之一. 在这个目标中，研究DNA 全序列具有什么结构，由这 4 个字符排成的看似随机的序列中隐藏着什么规律，又是解读这部“天书”的基础，是生物信息学(bioinformatics)最重要的课题之一.

虽然人类对这部“天书”知之甚少，但也发现了DNA 序列中的一些规律性和结构. 例如，在全序列中有一些是用于编码蛋白质的序列片段，即由这 4 个字符组成的 64 种不同的 3 字符串，其中大多数用于编码构成蛋白质的 20 种氨基酸；在不用于编码蛋白质的序列片段中，A 和T 的量特别大，于是以某些碱基特别丰富作为特征去研究DNA 序列的结构也取得了一些成果；此外，利用统计的方法还发现序列的某些片段之间具有相关性；等等. 这些发现让人们相信，DNA 序列中存在着局部的和全局性的结构，充分发掘序列的结构对理解 DNA 全序列是十分有意义

---

* 本题选自 2000 年网易杯全国大学生数学建模竞赛 A 题.

的. 目前在这项研究中最普通的思想是省略序列的某些细节，突出特征，然后将其表示成适当的数学对象. 这种被称为粗粒化和模型化的方法往往有助于研究规律性和结构.

作为研究DNA序列的结构的尝试，提出以下对序列集合进行分类的问题.

下面有20个已知类别的人工制造的序列*，其中序列标号1～10为A类，11～20为B类. 请从中提取特征，构造分类方法，并用这些已知类别的序列，衡量你的方法是否足够好. 然后用你认为满意的方法，对另外20个未标明类别的人工序列(标号21～40)进行分类，判断哪些属于A类，哪些属于B类，哪些既不属于A类又不属于B类.

1. aggcacggaaaaacgggaataacggaggaggacttggcacggcattacacggaggacgaggtaaaggaggcttgtctacggccggaagtgaagggggatatgaccgcttgg
2. cggaggacaaacgggatggcggtattggaggtggcggactgttcggggaattattcggtttaaacgggacaaggaaggcggctggaacaaccggacggtggcagcaaagga
3. gggacggatacggattctggccacggacggaaaggaggacacggcggacatacacggcggcaacggacggaacggaggaaggagggcggcaatcggtacggaggcggcgga
4. atggataacggaaacaaaccagacaaacttcggtagaaatacagaagcttagatgcatatgtttttaaataaaatttgtattattatggtatcataaaaaaaggttgcga
5. cggctggcggacaacggactggcggattccaaaaacggaggaggcggacggaggctacaccaccgtttcggcggaaaggcggagggctggcaggaggctcattacggggag
6. atggaaaattttcggaaaggcggcaggcaggaggcaaaggcggaaaggaaggaaacggcggatatttcggaagtggatattaggagggcggaataaaggaacggcggcaca
7. atgggattattgaatggcggaggaagatccggaataaaatatggcggaaagaacttgttttcggaaatggaaaaaggactaggaatcggcggcaggaaggatatggaggcg
8. atggccgatcggcttaggctggaaggaacaaataggcggaattaaggaaggcgttctcgcttttcgacaaggaggcggaccataggaggcggattaggaacggttatgagg
9. atggcggaaaaaggaaatgtttggcatcggcgggctccggcaactggaggttcggccatggaggcgaaaatcgtgggcggcggcagcgctggccggagtttgaggagcgcg
10. tggccgcggaggggcccgtcgggcgcggatttctacaagggcttcctgttaaggaggtggcatccaggcgtcgcacgctcggcgcggcaggaggcacgcgggaaaaaacg

11. gttagatttaacgttttttatggaatttatggaattataaatttaaaaatttatattttttaggtaagtaatccaacgtttttattactttttaaaattaaatatttatt
12. gtttaattactttatcatttaatttaggttttaattttaaatttaatttaggtaagatgaatttggttttttttaaggtagttatttaattatcgttaaggaaagttaaa

* 数据来源：www.csiam.edu.cn/mcm.

13. gtattacaggcagaccttatttaggttattattatttggattttttttttttttttttttaagttaaccgaattatttctttaaagacgttac ttaatgtcaatgc

14. gttagtctttttagattaaattattagattatgcagtttttttacataagaaaattttttttcggagttcatattctaatctgtctttattaaa tcttagagatatta

15. gtattatatttttttatttttattattttagaatataatttgaggtatgtgtttaaaaaaaatttttttttttttttttttttttttttttaaaattt ataaatttaa

16. gttatttttaaatttaattttaatttaaaatacaaatttttactttctaaaattggtctctggatcgataatgtaaacttattgaatctatag aattacattattgat

17. gtatgtctatttcacggaagaatgcaccactatatgatttgaaattatctatggctaaaaaccctcagtaaaatcaatccctaaacccttaa aaaacggcggcctatccc

18. gttaattatttattccttacgggcaattaattatttattacggttttatttacaattttttttttttgtcctatagagaaattacttacaaaacgt tattttacatactt

19. gttacattatttattattatccgttatcgataatttttacctctttttcgctgagtttttattcttactttttttcttctttatataggatctcat ttaatatcttaa

20. gtatttaactctctttactttttttttcactctctacattttcatcttctaaaactgtttgatttaaacttttgtttctttaaggattttttttactta tcctctgttat

21. tttagctcagtccagctagctagtttacaatttcgacaccagtttcgcaccatcttaaatttcgatccgtaccgtaatttagcttagatttgg atttaaaggatttagattga

22. tttagtacagtagctcagtccaagaacgatgtttaccgtaacgtgacgtaccgtacgctaccgttaccggattccggaaagccgattaag gaccgatcgaaaggg

23. cgggcggatttaggccgacggggacccgggattcgggacccgaggaaattcccggattaaggtttagcttcccgggatttagggccc ggatggctgggaccc

24. tttagctagctactttagctatttttagtagctagccagcctttaaggctagctttagctagcattgttctttattgggacccaagttcgact tttacgatttagttttgaccgt

25. gaccaaaggtgggctttagggacccgatgctttagtcgcagctggaccagttccccagggtattaggcaaaagctgacgggcaattgc aatttaggcttaggcca

26. gatttactttagcatttttagctgacgttagcaagcattagctttagccaatttcgcatttgccagtttcgcagctcagttttaacgcgggat ctttagcttcaagctttttac

27. ggattcggatttacccggggattggcggaacgggacctttaggtcgggacccattaggagtaaatgccaaaggacgctggtttagcca gtccgttaaggcttag

28. tccttagatttcagttactatatttgacttacagtctttgagatttcccttacgattttgacttaaaatttagacgttagggcttatcagttat ggattaatttagcttattttcga

29. ggccaattccggtaggaaggtgatggcccgggggttcccgggaggatttaggctgacgggccggccatttcggtttagggagggccg ggacgcgttagggc

30. cgctaagcagctcaagctcagtcagtcacgtttgccaagtcagtaatttgccaaagttaaccgttagctgacgctgaacgctaaacagta ttagctgatgactcgta

31. ttaaggacttaggctttagcagttactttagtttagttccaagctacgtttacgggaccagatgctagctagcaatttattatccgtattag

gcttaccgtaggtttagcgt

32. gctaccgggcagtctttaacgtagctaccgtttagtttgggcccagccttgcggtgtttcggattaaattcgttgtcagtcgctctrtggg
tttagtcattcccaaaagg

33. cagttagctgaatcgtttagccatttgacgtaaacatgattttacgtacgtaaattttagccctgacgtttagctaggaatttatgctgacg
tagcgatcgactttagcac

34. cggttagggcaaaggttggatttcgacccagggggaaagcccgggacccgaacccagggctttagcgtaggctgacgctaggcttag
gttggaacccggaaa

35. gcggaagggcgtaggtttgggatgcttagccgtaggctagctttcgacacgatcgattcgcaccacaggataaaagttaagggaccgg
taagtcgcggtagcc

36. ctagctacgaacgctttaggcgcccccgggagtagtcgttaccgttagtatagcagtcgcagtcgcaattcgcaaaagtccccagcttta
gccccagagtcgacg

37. gggatgctgacgctggttagctttaggcttagcgtagctttagggccccagtctgcaggaaatgcccaaaggaggcccaccgggtaga
tgccasagtgcaccgt

38. aactttagggcatttccagttttacgggttattttcccagttaaactttgcaccattttacgtgttacgatttacgtataatttgaccttattt
tggacactttagtttgggttac

39. ttagggccaagtcccgaggcaaggaattctgatccaagtccaatcacgtacagtccaagtcaccgtttgcagctaccgtttaccgtacgt
tgcaagtcaaatccat

40. ccattagggtttatttacctgtttatttttcccgagaccttaggtttaccgtactttttaacggtttacctttgaaatttttggactagcttac
cctggatttaacggccagttt

解　第一步:问题的分析.

由于DNA序列均是由A、T、C、G组成,且长短不一,所以采用提取DNA序列中A、T、C、G的百分率这一特征来对DNA序列进行模糊分类.

表2.6和表2.7分别列出了已知DNA和未知DNA序列中含A、T、C、G的个数(A类编号为1~10,B类编号为11~20;未知DNA序列编号为21~40).

表2.6　已知DNA序列含碱基(A、T、C、G)的个数

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	33	30	30	47	26	39	39	31	23	20	39	36	28	33	32	40	39	32	24	22
T	15	17	7	32	12	14	21	21	17	15	55	55	57	55	71	51	29	55	62	62
C	19	18	24	12	26	14	11	18	23	30	5	3	11	9	0	9	27	13	16	19
G	44	46	50	20	47	44	40	41	48	45	11	16	14	13	7	10	15	10	8	7

表2.7　未知DNA序列含碱基(A、T、C、G)的个数

No.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	31	30	18	24	26	25	24	30	15	31	27	19	30	24	25	24	22	26	29	23
T	41	23	19	47	23	44	24	52	19	27	40	36	37	17	21	22	21	51	25	50
C	22	25	26	22	24	24	21	17	22	26	20	25	21	24	22	32	26	20	30	23
G	19	26	39	22	32	21	35	18	45	23	25	29	23	37	35	27	34	20	22	20

第二步:DNA 序列的模糊分类.

提取已知类别的1～20 和未知类别的21～40 共40 条DNA 序列中A、T、C、G 的百分率(表2.8)构成如下矩阵:$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{40\times4}$,其中$x_{i1}$, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}分别表示第i条DNA 系列中的A、T、C、G 的百分率.

表2.8 DNA 序列中的A、T、C、G 的百分率

No.	A	T	C	G
1	0.2973	0.1351	0.1712	0.3964
2	0.2703	0.1532	0.1622	0.4144
3	0.2703	0.0631	0.2162	0.4505
4	0.4234	0.2883	0.1081	0.1802
5	0.2342	0.1081	0.2342	0.4234
6	0.3514	0.1261	0.1261	0.3964
7	0.3514	0.1892	0.0991	0.3604
8	0.2793	0.1892	0.1622	0.3694
9	0.2072	0.1532	0.2072	0.4324
10	0.1818	0.1364	0.2727	0.4091
11	0.3545	0.5000	0.0455	0.1000
12	0.3273	0.5000	0.0273	0.1455
13	0.2545	0.5182	0.1000	0.1273
14	0.3000	0.5000	0.0818	0.1182
15	0.2909	0.6455	0.0000	0.0636
16	0.3636	0.4636	0.0818	0.0909
17	0.3545	0.2636	0.2455	0.1364
18	0.2909	0.5000	0.1182	0.0909
19	0.2182	0.5636	0.1455	0.0727
20	0.2000	0.5636	0.1727	0.0636
21	0.2743	0.3628	0.1947	0.1681
22	0.2885	0.2212	0.2404	0.2500
23	0.1765	0.1863	0.2549	0.3824
24	0.2087	0.4087	0.1913	0.1913
25	0.2476	0.2190	0.2286	0.3048
26	0.2193	0.3860	0.2105	0.1842
27	0.2308	0.2308	0.2019	0.3365
28	0.2564	0.4444	0.1453	0.1538
29	0.1485	0.1881	0.2178	0.4455
30	0.2897	0.2523	0.2430	0.2150
31	0.2411	0.3571	0.1786	0.2232
32	0.1743	0.3303	0.2294	0.2661
33	0.2703	0.3333	0.1892	0.2072
34	0.2353	0.1667	0.2353	0.3627
35	0.2427	0.2039	0.2136	0.3398
36	0.2286	0.2095	0.3048	0.2571

续表

No.	A	T	C	G
37	0.2136	0.2039	0.2524	0.3301
38	0.2222	0.4359	0.1709	0.1709
39	0.2736	0.2358	0.2830	0.2075
40	0.1983	0.4310	0.1983	0.1724

采用夹角余弦法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{4}x_{ik}\cdot x_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{4}x_{ik}^{2}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{4}x_{jk}^{2}}},\quad i,j=1,2,\cdots,40,$$

建立模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{40\times 40}$，然后用传递闭包法进行聚类．在MATLAB工作空间中调用附录B中的M函数F_Jlfx (0, 2, X)，得到动态聚类图如图2.12所示.

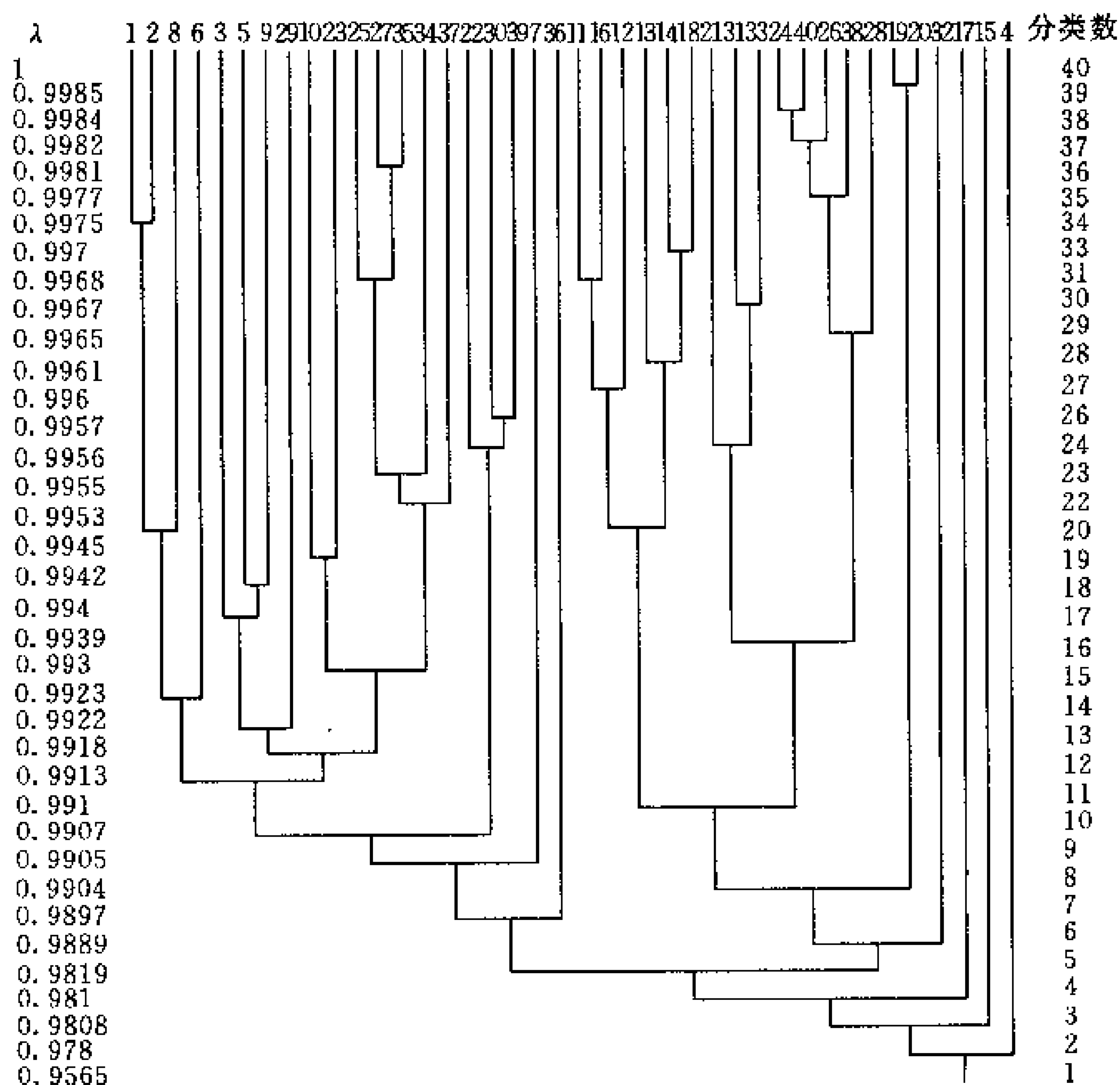


图2.12

第三步：用 F 统计量确定满意分类.

从图2.12 看出，当分类数不小于5 时，没有将A 类和B 类的DNA 聚在一起，应该说上述方法是比较满意的. 下面再用 F 统计方法加以确认.

用原始数据矩阵 X 分别计算部分分类所对应的 F 统计量的值，相应的临界值 $F_\alpha(\alpha=0.05)$ 和相对差值 $(F-F_\alpha)/F_\alpha$ 如表 2.9 所示.

表 2.9

分类数	13	12	11	10	9	8	7	6	5
F 值	41.844	35.260	30.142	18.848	18.261	17.061	17.716	20.667	23.520
F_α	2.132	2.151	2.177	2.211	2.255	2.313	2.389	2.494	2.642
$(F-F_\alpha)/F_\alpha$	18.624	15.391	12.847	7.526	7.098	6.377	6.414	7.288	7.904

从表2.9 看出，分成5,6,…,13 类都是满意的分类. 这里当λ=0.9897 时，即在0.9897 的水平上，可将40 条DNA 序列划分为7 类：

{1,2,8,6,3,5,9,29,10,23,25,27,35,34,37,7,22,30,39},{36},
{11,16,12,13,14,18,21,31,33,24,40,26,38,28,19,20},{32},{17},{15},{4}.

由此得

属于A 类的序号为22，23，25，27，29，30，34，35，37，39；

属于B 类的序号为21，24，26，28，31，33，38，40；

既不属于A 类又不属于B 类的序号为32，36.

例2.5.2　研究生招生中的模糊聚类分析方法[8]　高等学校的研究生招生工作与学科建设有着密切关系，所以，我们应该把招生工作当作一项系统工程和科学的事业来对待，认真加以研究. 同时，招生工作也是一项政策性很强的工作，其一表现在招生过程中必须坚持公开、公平、公正的原则，其二在招生过程中坚持原则性与灵活性的必要结合，特别是表现在破格录取的考生方面.

从应用数学的角度来看，招生工作本质上就是一项排名的工作. 为了使排名录取更趋合理、可信、科学，我们综合录取单位决策过程中的模糊信息，建立模糊数学模型，利用模糊聚类分析方法，根据聚类结果来确定每位考生的排名结果.

下面针对2000 年报考北京师范大学数学系基础数学专业硕士研究生的26 位考生5 科成绩(表2.10)来说明模型的建立过程及排名结果.

解　第一步：问题的分析.

模糊聚类分析方法的排名原则是，越先聚为一类的人，名次越靠近. 如果有一名考生，他的每科成绩都不低于这26 位考生中的任何一位，很显然他应当在录取名单中排列第一. 现在虚设这样一名考生(编号记为27)，其5 科成绩分别是68,73,97,100,96，然后按照与这名虚设考生聚为一类的先后次序确定录取排名顺序.

表 2.10 2000 年报考北京师范大学数学系基础数学专业硕士研究生成绩表

考生编号	考生成绩					总分
1	36	41	63	65	60	265
2	60	48	66	80	63	317
3	51	54	81	81	94	361
4	64	56	86	85	83	374
5	51	50	35	31	37	204
6	39	57	65	68	70	299
7	60	59	97	100	96	412
8	62	58	94	97	91	402
9	66	51	83	85	86	371
10	50	38	17	52	18	175
11	43	18	43	40	16	160
12	68	67	65	89	79	368
13	55	60	23	66	66	270
14	39	38	15	15	38	145
15	45	44	29	70	45	233
16	61	48	63	72	65	309
17	49	73	65	82	64	333
18	59	59	65	67	62	312
19	54	62	47	80	95	338
20	41	33	9	10	32	125
21	56	59	77	75	92	359
22	30	43	77	67	75	292
23	46	50	24	36	25	181
24	20	37	17	54	40	168
25	57	53	41	78	60	289
26	55	28	35	60	36	214

第二步:模糊聚类.

将5科成绩作为考生的特征数据,数据矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{27\times 5}$,其中 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}分别表示编号为 i 的考生的5科成绩.采用数量积法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{5}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,27.$$

建立模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{27\times 27}$,其中 $M=\max\limits_{i\neq j}\left(\sum_{k=1}^{5}x_{ik}\cdot x_{jk}\right)^{*}$,然后用传递闭包法

* 附录B中的M函数F_JIR.m是用 $M+1$ 替代 M 的.

进行聚类. 在MATLAB工作空间中调用附录B中的M 函数F_Jlfx (0,1,X),得到动态聚类图如图2.13所示.

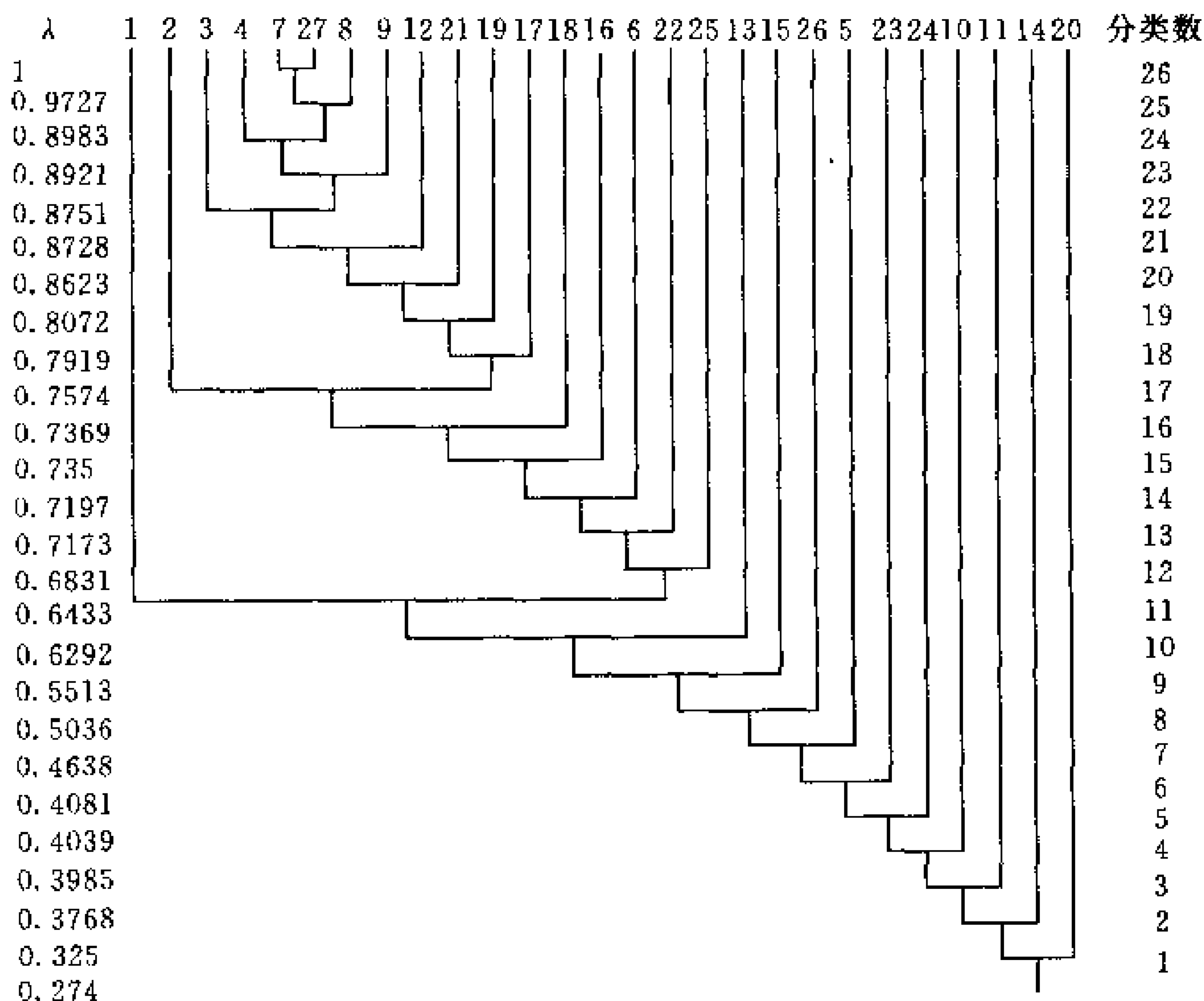


图2.13

第三步:确定研究生招生录取次序.

根据问题的分析及模糊聚类结果(图2.13),研究生招生的录取次序为7, 8, 4, 9, 3, 12, 21, 19,17, 2, 18, 16, 6, 22, 25, 1, 13, 15, 26, 5, 23, 24, 10, 11, 14, 20.

这种方法既考虑了考生的总分,又考虑了各科成绩是否均衡这个因素,即各科成绩是否接近各科最好成绩. 因此,就这26位考生5科成绩来说,这个录取次序是比较合理、比较可信、比较科学的.

例2.5.3 亚洲玉米螟测报的数学模型[9] 亚洲玉米螟(asian corn borer)是影响我国玉米生产的主要害虫之一. 过去,人们对玉米螟种群动态的研究,一般仅考虑时间因子,即研究种群随时间变化的规律,也有从玉米螟空间格局加以研究的. 而本例是把种群的数量动态与空间格局联系起来加以研究的. 同时还应指出,玉米螟的种群动态是一个具有模糊性的问题,玉米螟对玉米的危害程度也具有模糊性. 因此,本例利用模糊数学方法,建立亚洲玉米螟测报的数学模型.

解 第一步:采集样本,确定主要因子,建立数据矩阵.

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{26}\}$是武汉地区1951—1985年间的历史资料(26个样本),每个样本由8个主要指标来描述,即

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i8})\quad(i=1,2,\cdots,26).$$

8个主要指标的含义如下:

x_{i1}:上年7月、8月的平均气温;

x_{i2}:上年12月,当年1月、2月的平均气温;

x_{i3}:当年4月温湿系数;

x_{i4}:当年4月雨日数(降水量不小于0.1 mm的天数);

x_{i5}:当年4月日照数;

x_{i6}:当年4月风速($m\cdot s^{-1}$);

x_{i7}:当年5月上旬的温湿系数;

x_{i8}:当年5月第一次田间调查的玉米螟卵块数.

由历史资料提供的原始数据如表2.11所示.

表2.11

样本号	指标							
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}	x_{i6}	x_{i7}	x_{i8}
1	28.5	3.5	5.90	18	85.5	2.6	20.3	5.6
2	28.7	5.2	4.52	10	192.3	3.4	20.6	7.9
3	27.9	4.4	4.81	11	161.1	2.9	22.8	6.3
4	30.0	4.9	5.35	18	97.1	2.8	19.4	1.7
5	28.7	5.2	4.48	9	185.9	2.8	20.1	3.4
6	28.4	2.7	4.91	19	122.1	2.7	16.3	8.1
7	28.3	5.4	4.71	17	146.5	3.0	18.5	4.1
8	28.6	5.3	4.44	9	177.7	3.0	19.0	8.6
9	31.0	5.4	5.33	12	140.8	2.7	17.4	1.6
10	28.5	4.6	4.46	12	159.5	2.9	20.8	4.1
11	29.8	4.9	5.59	16	146.2	2.7	17.4	2.1
12	28.6	4.5	5.63	15	110.3	2.7	17.5	1.5
13	27.8	5.2	5.58	16	126.3	2.7	21.6	6.5
14	29.6	3.4	5.62	19	121.2	2.9	19.7	6.1
15	27.7	2.8	5.29	15	148.2	3.6	23.5	6.8
16	27.8	4.6	5.59	16	190.1	2.4	20.7	7.0
17	28.4	4.7	5.19	12	126.4	3.1	18.9	4.1
18	29.3	3.0	5.47	15	149.5	3.1	22.7	3.9
19	28.1	5.2	4.63	16	158.0	3.7	20.2	7.8
20	28.5	3.9	3.93	10	187.1	2.9	18.9	7.1
21	28.6	4.5	5.33	16	134.3	3.1	18.9	7.2
22	28.1	3.3	4.86	17	127.1	2.4	16.7	7.4

续表

样本号	指标							
	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}	x_{i6}	x_{i7}	x_{i8}
23	28.1	5.4	4.73	11	199.9	1.9	21.3	2.7
24	30.1	6.0	5.09	15	177.8	2.7	17.2	1.3
25	28.8	5.4	4.75	13	139.0	2.7	20.4	3.1
26	27.9	4.3	5.12	16	151.0	2.0	18.7	9.3

第二步:标定——建立模糊相似矩阵.

采用指数相似系数,第 i 个样本与第 j 个样本的相似系数为

$$r_{ij}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\exp\left[-\frac{3}{4}\times\frac{(x_{ik}-x_{jk})^2}{s_k^2}\right], \tag{2.2}$$

其中 s_k^2 是第 k 个因子的方差,即

$$s_k^2=\frac{1}{26}\sum_{i=1}^{26}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2,\quad \bar{x}_k=\frac{1}{26}\sum_{i=1}^{26}x_{ik}.$$

由式(2.2)算得模糊相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
1 & 0.551 & 0.536 & 0.513 & 0.579 & 0.679 & 0.589 & 0.527 & 0.474 & 0.621 & 0.553 & 0.701 & 0.658 & 0.685 & 0.538 & 0.638 & 0.592 & 0.587 & 0.581 & 0.671 & 0.638 & 0.671 & 0.528 & 0.486 & 0.659 & 0.571 \\
0.551 & 1 & 0.596 & 0.483 & 0.526 & 0.470 & 0.681 & 0.840 & 0.435 & 0.780 & 0.470 & 0.540 & 0.607 & 0.453 & 0.478 & 0.575 & 0.650 & 0.483 & 0.747 & 0.613 & 0.645 & 0.469 & 0.692 & 0.401 & 0.742 & 0.524 \\
0.536 & 0.596 & 1 & 0.534 & 0.647 & 0.550 & 0.701 & 0.618 & 0.426 & 0.798 & 0.462 & 0.544 & 0.683 & 0.554 & 0.538 & 0.656 & 0.655 & 0.522 & 0.481 & 0.705 & 0.611 & 0.617 & 0.723 & 0.409 & 0.658 & 0.652 \\
0.513 & 0.483 & 0.534 & 1 & 0.667 & 0.472 & 0.609 & 0.499 & 0.768 & 0.643 & 0.855 & 0.705 & 0.675 & 0.695 & 0.476 & 0.595 & 0.664 & 0.550 & 0.536 & 0.513 & 0.675 & 0.403 & 0.521 & 0.749 & 0.458 & 0.545 \\
0.579 & 0.526 & 0.647 & 0.667 & 1 & 0.513 & 0.734 & 0.842 & 0.548 & 0.505 & 0.624 & 0.698 & 0.662 & 0.531 & 0.395 & 0.535 & 0.656 & 0.496 & 0.695 & 0.685 & 0.613 & 0.429 & 0.719 & 0.559 & 0.565 & 0.465 \\
0.679 & 0.470 & 0.550 & 0.472 & 0.513 & 1 & 0.629 & 0.505 & 0.558 & 0.499 & 0.544 & 0.642 & 0.571 & 0.543 & 0.550 & 0.475 & 0.545 & 0.474 & 0.560 & 0.572 & 0.575 & 0.610 & 0.474 & 0.604 & 0.639 & 0.601 \\
0.589 & 0.681 & 0.731 & 0.609 & 0.734 & 0.629 & 1 & 0.799 & 0.584 & 0.758 & 0.583 & 0.534 & 0.536 & 0.574 & 0.446 & 0.585 & 0.764 & 0.525 & 0.797 & 0.659 & 0.723 & 0.459 & 0.778 & 0.570 & 0.790 & 0.580 \\
0.527 & 0.549 & 0.618 & 0.499 & 0.842 & 0.505 & 0.799 & 1 & 0.523 & 0.334 & 0.485 & 0.560 & 0.572 & 0.521 & 0.397 & 0.539 & 0.737 & 0.492 & 0.721 & 0.724 & 0.727 & 0.497 & 0.637 & 0.440 & 0.689 & 0.545 \\
0.474 & 0.485 & 0.426 & 0.768 & 0.648 & 0.508 & 0.584 & 0.523 & 1 & 0.517 & 0.758 & 0.698 & 0.646 & 0.435 & 0.445 & 0.479 & 0.634 & 0.470 & 0.456 & 0.466 & 0.582 & 0.422 & 0.545 & 0.786 & 0.691 & 0.479 \\
0.621 & 0.780 & 0.798 & 0.643 & 0.505 & 0.499 & 0.755 & 0.534 & 0.517 & 1 & 0.565 & 0.695 & 0.635 & 0.599 & 0.470 & 0.640 & 0.758 & 0.545 & 0.708 & 0.772 & 0.718 & 0.492 & 0.689 & 0.453 & 0.735 & 0.578 \\
0.553 & 0.470 & 0.462 & 0.855 & 0.624 & 0.544 & 0.583 & 0.485 & 0.758 & 0.565 & 1 & 0.858 & 0.736 & 0.705 & 0.395 & 0.635 & 0.550 & 0.572 & 0.504 & 0.480 & 0.593 & 0.455 & 0.491 & 0.742 & 0.671 & 0.493 \\
0.701 & 0.540 & 0.544 & 0.705 & 0.698 & 0.642 & 0.634 & 0.560 & 0.698 & 0.695 & 0.858 & 1 & 0.723 & 0.513 & 0.395 & 0.674 & 0.704 & 0.532 & 0.533 & 0.642 & 0.708 & 0.537 & 0.533 & 0.637 & 0.728 & 0.573 \\
0.658 & 0.607 & 0.683 & 0.678 & 0.462 & 0.571 & 0.636 & 0.572 & 0.646 & 0.635 & 0.733 & 0.723 & 1 & 0.627 & 0.634 & 0.833 & 0.553 & 0.582 & 0.713 & 0.525 & 0.615 & 0.516 & 0.667 & 0.546 & 0.719 & 0.608 \\
0.681 & 0.453 & 0.554 & 0.695 & 0.531 & 0.543 & 0.574 & 0.521 & 0.456 & 0.599 & 0.705 & 0.619 & 0.627 & 1 & 0.516 & 0.627 & 0.513 & 0.755 & 0.486 & 0.660 & 0.603 & 0.564 & 0.403 & 0.514 & 0.518 & 0.512 \\
0.538 & 0.478 & 0.604 & 0.476 & 0.395 & 0.550 & 0.446 & 0.397 & 0.446 & 0.470 & 0.375 & 0.350 & 0.634 & 0.514 & 1 & 0.610 & 0.543 & 0.674 & 0.621 & 0.453 & 0.563 & 0.573 & 0.509 & 0.397 & 0.425 & 0.596 \\
0.638 & 0.575 & 0.486 & 0.595 & 0.516 & 0.475 & 0.585 & 0.539 & 0.479 & 0.640 & 0.635 & 0.674 & 0.833 & 0.627 & 0.610 & 1 & 0.641 & 0.559 & 0.685 & 0.565 & 0.687 & 0.668 & 0.598 & 0.395 & 0.543 & 0.761 \\
0.592 & 0.650 & 0.655 & 0.664 & 0.686 & 0.545 & 0.764 & 0.737 & 0.634 & 0.758 & 0.593 & 0.704 & 0.598 & 0.513 & 0.543 & 0.641 & 1 & 0.615 & 0.641 & 0.693 & 0.915 & 0.562 & 0.639 & 0.575 & 0.653 & 0.729 \\
0.587 & 0.483 & 0.522 & 0.580 & 0.496 & 0.474 & 0.525 & 0.492 & 0.470 & 0.548 & 0.572 & 0.532 & 0.582 & 0.755 & 0.674 & 0.559 & 0.615 & 1 & 0.435 & 0.502 & 0.680 & 0.478 & 0.475 & 0.434 & 0.540 & 0.464 \\
0.581 & 0.767 & 0.481 & 0.536 & 0.695 & 0.560 & 0.797 & 0.721 & 0.486 & 0.702 & 0.504 & 0.533 & 0.713 & 0.486 & 0.621 & 0.685 & 0.641 & 0.435 & 1 & 0.563 & 0.637 & 0.617 & 0.766 & 0.438 & 0.717 & 0.647 \\
0.661 & 0.613 & 0.705 & 0.515 & 0.685 & 0.572 & 0.650 & 0.724 & 0.466 & 0.772 & 0.480 & 0.642 & 0.625 & 0.660 & 0.453 & 0.565 & 0.693 & 0.502 & 0.563 & 1 & 0.707 & 0.599 & 0.523 & 0.430 & 0.590 & 0.622 \\
0.638 & 0.645 & 0.611 & 0.675 & 0.613 & 0.575 & 0.723 & 0.727 & 0.582 & 0.718 & 0.593 & 0.708 & 0.615 & 0.403 & 0.563 & 0.687 & 0.915 & 0.680 & 0.637 & 0.707 & 1 & 0.575 & 0.521 & 0.480 & 0.604 & 0.726 \\
0.671 & 0.469 & 0.417 & 0.403 & 0.429 & 0.610 & 0.659 & 0.497 & 0.422 & 0.492 & 0.455 & 0.537 & 0.516 & 0.564 & 0.573 & 0.668 & 0.562 & 0.478 & 0.617 & 0.599 & 0.575 & 1 & 0.551 & 0.492 & 0.537 & 0.666 \\
0.522 & 0.692 & 0.723 & 0.521 & 0.719 & 0.474 & 0.778 & 0.637 & 0.545 & 0.689 & 0.491 & 0.533 & 0.667 & 0.403 & 0.509 & 0.598 & 0.639 & 0.475 & 0.766 & 0.523 & 0.521 & 0.551 & 1 & 0.499 & 0.790 & 0.610 \\
0.486 & 0.401 & 0.409 & 0.749 & 0.559 & 0.604 & 0.570 & 0.440 & 0.781 & 0.453 & 0.742 & 0.637 & 0.546 & 0.514 & 0.397 & 0.395 & 0.578 & 0.434 & 0.438 & 0.430 & 0.480 & 0.492 & 0.499 & 1 & 0.665 & 0.518 \\
0.459 & 0.742 & 0.658 & 0.658 & 0.565 & 0.639 & 0.790 & 0.689 & 0.691 & 0.735 & 0.671 & 0.728 & 0.718 & 0.518 & 0.425 & 0.543 & 0.653 & 0.540 & 0.717 & 0.590 & 0.604 & 0.537 & 0.790 & 0.665 & 1 & 0.478 \\
0.571 & 0.524 & 0.652 & 0.545 & 0.465 & 0.601 & 0.580 & 0.545 & 0.479 & 0.578 & 0.493 & 0.572 & 0.608 & 0.512 & 0.596 & 0.761 & 0.729 & 0.406 & 0.647 & 0.622 & 0.726 & 0.666 & 0.610 & 0.518 & 0.478 & 1
\end{array}\right)$$

第三步:聚类.

1）用二次方法求传递闭包 $t(R)$：$R\to R^2\to R^4\to R^8$，$R^8\circ R^8=R^8$，得模糊等价矩阵 $t(R)=R^8=R^*$ 为

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.679 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.674 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.679 & 0.703 & 0.703 & 0.703 & 0.703 \\
0.703 & 1 & 0.791 & 0.728 & 0.840 & 0.679 & 0.799 & 0.840 & 0.728 & 0.840 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.840 & 0.729 \\
0.703 & 0.791 & 1 & 0.728 & 0.791 & 0.679 & 0.791 & 0.791 & 0.728 & 0.791 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.791 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.791 & 0.729 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 1 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.855 & 0.855 & 0.738 & 0.705 & 0.674 & 0.738 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.840 & 0.791 & 0.728 & 1 & 0.679 & 0.799 & 0.842 & 0.728 & 0.900 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.860 & 0.729 \\
0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 1 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.674 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.810 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 \\
0.703 & 0.799 & 0.791 & 0.728 & 0.799 & 0.679 & 1 & 0.799 & 0.728 & 0.799 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.799 & 0.729 \\
0.703 & 0.840 & 0.791 & 0.728 & 0.842 & 0.679 & 0.799 & 1 & 0.728 & 0.842 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.842 & 0.729 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 1 & 0.728 & 0.768 & 0.768 & 0.738 & 0.705 & 0.674 & 0.738 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.781 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.840 & 0.791 & 0.728 & 0.900 & 0.679 & 0.799 & 0.842 & 0.728 & 1 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.860 & 0.729 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.855 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 1 & 0.858 & 0.738 & 0.705 & 0.674 & 0.738 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.855 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.858 & 1 & 0.738 & 0.705 & 0.674 & 0.738 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.738 & 0.738 & 1 & 0.705 & 0.674 & 0.833 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.679 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 1 & 0.674 & 0.705 & 0.705 & 0.755 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.679 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 \\
0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 1 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 & 0.674 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.738 & 0.738 & 0.833 & 0.705 & 0.674 & 1 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.738 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.764 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.679 & 0.764 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 1 & 0.705 & 0.764 & 0.764 & 0.916 & 0.679 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.729 \\
0.703 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.679 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.755 & 0.674 & 0.705 & 0.705 & 1 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.679 & 0.705 & 0.705 & 0.705 & 0.705 \\
0.703 & 0.797 & 0.791 & 0.728 & 0.797 & 0.679 & 0.797 & 0.797 & 0.728 & 0.797 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 1 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 0.797 & 0.729 \\
0.703 & 0.772 & 0.772 & 0.728 & 0.772 & 0.679 & 0.772 & 0.772 & 0.728 & 0.772 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.772 & 1 & 0.764 & 0.679 & 0.772 & 0.728 & 0.772 & 0.729 \\
0.703 & 0.764 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.679 & 0.764 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.916 & 0.705 & 0.764 & 0.764 & 1 & 0.679 & 0.764 & 0.728 & 0.764 & 0.729 \\
0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.810 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.674 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 1 & 0.679 & 0.679 & 0.679 & 0.679 \\
0.703 & 0.790 & 0.790 & 0.728 & 0.790 & 0.679 & 0.790 & 0.790 & 0.728 & 0.790 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.790 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 1 & 0.728 & 0.790 & 0.729 \\
0.703 & 0.728 & 0.728 & 0.768 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 0.728 & 0.781 & 0.728 & 0.768 & 0.768 & 0.738 & 0.705 & 0.674 & 0.738 & 0.728 & 0.705 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.679 & 0.728 & 1 & 0.728 & 0.728 \\
0.703 & 0.840 & 0.791 & 0.728 & 0.860 & 0.679 & 0.799 & 0.842 & 0.728 & 0.860 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.764 & 0.705 & 0.797 & 0.772 & 0.764 & 0.679 & 0.790 & 0.728 & 1 & 0.729 \\
0.703 & 0.729 & 0.729 & 0.728 & 0.729 & 0.679 & 0.729 & 0.729 & 0.728 & 0.729 & 0.728 & 0.728 & 0.728 & 0.705 & 0.674 & 0.728 & 0.729 & 0.705 & 0.729 & 0.729 & 0.729 & 0.679 & 0.729 & 0.728 & 0.729 & 1
\end{pmatrix}
$$

2）聚类. 当 λ 由 0.916 降到 0.679 时，得到一系列等价的布尔矩阵 R_λ（省略）.

3）根据武汉地区的实际情况，将玉米螟对玉米的危害程度划分为 Ⅰ（轻）、Ⅱ（较重）、Ⅲ（重）、Ⅳ（严重）4 个等级为宜. 取 $\lambda=0.7053$，将原始样本分为 4 类.

Ⅰ类（危害轻年份）：$\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20},x_{21},x_{23},x_{24},x_{25},x_{26}\}$；

Ⅱ类（危害较重年份）：$\{x_1\}$；

Ⅲ类（危害重年份）：$\{x_6,x_{22}\}$；

Ⅳ类（危害严重年份）：$\{x_{15}\}$.

4）回报与预测. 将 1986 年和 1987 年的有关因子的 8 个数据输入上述模型，经过运算，同样取 $\lambda=0.7053$，可以判定：1986 年和1987 年归并 Ⅰ 类，即这两年为危害轻年份.

类似地，将要预测年份的有关 8 个因子的数据输入上述模型，经过运算，同样可判定该年份归并哪一类，即可判定该年份危害的轻重程度. 此模型对防治玉米螟有一定的实用价值.

例2.5.4　模糊聚类分析在市场划分中的应用　在市场经济条件下，市场划分是一项重要的战略措施，它有许多显著的特点：1° 使企业的产品经销有针对性，可以更好地满足顾客的需求；2° 在市场经营上便于专业化，销售人员可以集中力量对一些特定顾客进行宣传和推销，从而提高市场经营的效果.因此，将市场动态地划分为各个层次的若干种类群是很有意义的.

由于在给定的一个市场中，顾客的购买行为是有差异的，因而，根据对顾客购买行为的差异的观测数据，可将市场进行划分.例如，设一个市场具有n个顾客和m种商品，那么，可以用矩阵$A=(a_{ij})_{n\times m}$来表示顾客的购买行为，其中a_{ij}表示第i个顾客对第j种商品的购买行为的程度.

在国际贸易中，为了打入国际市场，必须首先认真地制定国际市场划分策略.

解　第一步：设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$(20个国家或地区).

一个国家或地区作为一个需求单位，而每个国家或地区用10个特征指数来衡量(如，地理指数——地理位置、人口密度等，人口状况指数——生活方式、商品使用率等，经济指数——国民生产总值、进出口贸易总值等，社会结构指数——君主立宪制、议会制等)，即

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i10})\ (i=1,2,\cdots,20),$$

原始数据如表2.12所示.

表2.12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.美国	2112.000	7.590	6172.3	6.963	218.927	−37.125	552.953	8	93	23.5
2.加拿大	197.470	1.906	4801.8	0.838	56.825	1.358	716.070	98	93	2.4
3.墨西哥	92.616	1.961	883.8	0.405	12.086	−3.104	586.240	98	93	354.9
4.澳大利亚	116.249	1.485	4955.5	0.405	18.232	0.433	717.144	98	122	1.9
5.中国香港	13.680	1.485	2257.1	0.047	17.137	−2.305	664.956	8	4	4530.0
6.印度	117.656	6.064	121.3	13.794	8.150	−1.710	363.565	38	4	198.0
7.日本	1053.320	18.839	5305.0	1.170	110.670	−7.625	206.142	8	4	312.4
8.新加坡	8.121	5.822	2138.3	0.011	17.635	−3.402	515.021	8	4	83.0
9.泰国	21.785	2.113	313.3	0.263	7.156	−1.848	554.279	38	4	83.0
10.埃及	18.761	0.991	296.8	0.375	8.837	−1.997	570.578	38	33	40.8
11.伊朗	19.274	6.745	627.3	0.011	7.261	11.739	794.799	68	4	27.7
12.黎巴嫩	3.086	1.926	1262.5	0.062	2.414	−1.709	595.918	38	4	299.0
13.摩洛哥	13.329	0.231	478.9	0.018	3.807	−1.935	573.074	68	33	43.9
14.索马里	0.249	0.069	252.9	0.021	0.440	−0.258	564.102	68	33	5.6
15.赞比亚	−2.900	0.064	252.9	0.021	0.756	0.572	664.776	68	33	7.6
16.苏丹	5.307	0.048	244.8	0.003	1.110	−0.575	637.408	68	33	7.1
17.韩国	47.583	2.488	794.7	0.542	20.399	−5.284	516.577	98	4	383.8
18.巴基斯坦	19.727	0.511	215.0	0.146	4.061	−1.025	315.374	38	4	99.2
19.秘鲁	8.894	1.795	400.8	0.386	2.146	1.386	510.493	38	93	13.6
20.马来西亚	16.249	8.379	881.8	0.094	7.849	3.228	580.209	68	4	100.0

第二步：标定.

用欧几里得距离公式

$$r_{ij}=1-C\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-x_{jk})^2}$$

来定义两个需求单位之间的需求相似程度，这样一来，市场的动态划分问题就转化为20阶矩阵的动态聚类分析问题. 所建立的相似矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 0.629 & 0.111 & 0.631 & 0.008 & 0.000 & 0.773 & 0.286 & 0.024 & 0.022 & 0.070 & 0.161 & 0.046 & 0.014 & 0.014 & 0.013 & 0.095 & 0.009 & 0.037 & 0.107 \\
0.629 & 1 & 0.383 & 0.972 & 0.185 & 0.263 & 0.817 & 0.580 & 0.295 & 0.293 & 0.345 & 0.442 & 0.321 & 0.286 & 0.286 & 0.285 & 0.368 & 0.277 & 0.309 & 0.384 \\
0.111 & 0.383 & 1 & 0.359 & 0.311 & 0.872 & 0.289 & 0.797 & 0.809 & 0.894 & 0.925 & 0.936 & 0.918 & 0.866 & 0.885 & 0.884 & 0.976 & 0.878 & 0.905 & 0.956 \\
0.631 & 0.972 & 0.359 & 1 & 0.173 & 0.239 & 0.815 & 0.556 & 0.271 & 0.269 & 0.321 & 0.418 & 0.298 & 0.262 & 0.263 & 0.261 & 0.344 & 0.254 & 0.285 & 0.361 \\
0.008 & 0.185 & 0.311 & 0.173 & 1 & 0.241 & 0.165 & 0.302 & 0.239 & 0.232 & 0.249 & 0.319 & 0.244 & 0.224 & 0.225 & 0.224 & 0.310 & 0.233 & 0.234 & 0.273 \\
0.000 & 0.263 & 0.872 & 0.239 & 0.241 & 1 & 0.174 & 0.682 & 0.951 & 0.946 & 0.891 & 0.816 & 0.928 & 0.948 & 0.937 & 0.941 & 0.887 & 0.973 & 0.939 & 0.874 \\
0.773 & 0.817 & 0.288 & 0.815 & 0.165 & 0.174 & 1 & 0.474 & 0.198 & 0.195 & 0.242 & 0.342 & 0.223 & 0.188 & 0.186 & 0.186 & 0.274 & 0.185 & 0.211 & 0.285 \\
0.286 & 0.580 & 0.797 & 0.556 & 0.302 & 0.682 & 0.474 & 1 & 0.714 & 0.711 & 0.759 & 0.858 & 0.739 & 0.704 & 0.703 & 0.702 & 0.784 & 0.697 & 0.727 & 0.803 \\
0.024 & 0.295 & 0.809 & 0.271 & 0.239 & 0.951 & 0.198 & 0.714 & 1 & 0.991 & 0.937 & 0.847 & 0.972 & 0.983 & 0.976 & 0.978 & 0.910 & 0.959 & 0.976 & 0.911 \\
0.022 & 0.293 & 0.894 & 0.269 & 0.232 & 0.948 & 0.195 & 0.711 & 0.991 & 1 & 0.937 & 0.843 & 0.971 & 0.989 & 0.982 & 0.985 & 0.904 & 0.957 & 0.978 & 0.908 \\
0.070 & 0.345 & 0.925 & 0.321 & 0.249 & 0.891 & 0.242 & 0.759 & 0.937 & 0.937 & 1 & 0.887 & 0.958 & 0.931 & 0.938 & 0.935 & 0.924 & 0.900 & 0.941 & 0.947 \\
0.161 & 0.442 & 0.936 & 0.418 & 0.319 & 0.816 & 0.342 & 0.858 & 0.847 & 0.843 & 0.887 & 1 & 0.871 & 0.835 & 0.835 & 0.834 & 0.924 & 0.827 & 0.856 & 0.932 \\
0.046 & 0.321 & 0.918 & 0.298 & 0.244 & 0.928 & 0.223 & 0.739 & 0.972 & 0.971 & 0.958 & 0.871 & 1 & 0.964 & 0.961 & 0.961 & 0.926 & 0.941 & 0.981 & 0.936 \\
0.014 & 0.266 & 0.866 & 0.262 & 0.224 & 0.948 & 0.188 & 0.704 & 0.983 & 0.989 & 0.931 & 0.835 & 0.964 & 1 & 0.984 & 0.988 & 0.896 & 0.957 & 0.973 & 0.900 \\
0.014 & 0.286 & 0.885 & 0.263 & 0.225 & 0.937 & 0.186 & 0.703 & 0.976 & 0.982 & 0.938 & 0.835 & 0.961 & 0.984 & 1 & 0.995 & 0.894 & 0.943 & 0.965 & 0.899 \\
0.013 & 0.285 & 0.884 & 0.261 & 0.224 & 0.941 & 0.186 & 0.702 & 0.978 & 0.985 & 0.935 & 0.834 & 0.961 & 0.988 & 0.995 & 1 & 0.893 & 0.947 & 0.967 & 0.899 \\
0.095 & 0.368 & 0.976 & 0.344 & 0.310 & 0.887 & 0.274 & 0.784 & 0.910 & 0.904 & 0.924 & 0.924 & 0.936 & 0.896 & 0.894 & 0.893 & 1 & 0.893 & 0.913 & 0.952 \\
0.009 & 0.277 & 0.878 & 0.254 & 0.233 & 0.973 & 0.185 & 0.697 & 0.959 & 0.957 & 0.900 & 0.827 & 0.941 & 0.957 & 0.943 & 0.947 & 0.893 & 1 & 0.954 & 0.887 \\
0.037 & 0.309 & 0.905 & 0.285 & 0.234 & 0.939 & 0.211 & 0.727 & 0.976 & 0.978 & 0.941 & 0.856 & 0.981 & 0.973 & 0.965 & 0.967 & 0.913 & 0.954 & 1 & 0.921 \\
0.107 & 0.384 & 0.956 & 0.361 & 0.273 & 0.874 & 0.265 & 0.803 & 0.911 & 0.908 & 0.947 & 0.932 & 0.936 & 0.900 & 0.899 & 0.899 & 0.952 & 0.887 & 0.921 & 1
\end{pmatrix}.$$

第三步：聚类.

用二次方法求传递闭包 $t(\boldsymbol{R})$：$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^8$，$\boldsymbol{R}^8\circ\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^8$，得模糊等价矩阵 $t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^*$ 为

$$\begin{pmatrix}
1 & 0.773 & 0.580 & 0.773 & 0.319 & 0.580 & 0.773 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 \\
0.773 & 1 & 0.580 & 0.972 & 0.319 & 0.580 & 0.817 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 \\
0.580 & 0.580 & 1 & 0.580 & 0.319 & 0.947 & 0.580 & 0.858 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.936 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.976 & 0.947 & 0.947 & 0.956 \\
0.773 & 0.972 & 0.580 & 1 & 0.319 & 0.580 & 0.817 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 \\
0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 1 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 & 0.319 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 1 & 0.580 & 0.858 & 0.959 & 0.959 & 0.958 & 0.936 & 0.959 & 0.959 & 0.959 & 0.959 & 0.947 & 0.973 & 0.959 & 0.947 \\
0.773 & 0.817 & 0.580 & 0.817 & 0.319 & 0.580 & 1 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 & 0.580 \\
0.580 & 0.580 & 0.858 & 0.580 & 0.319 & 0.858 & 0.580 & 1 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 & 0.858 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 1 & 0.991 & 0.958 & 0.936 & 0.978 & 0.989 & 0.988 & 0.988 & 0.947 & 0.959 & 0.978 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.991 & 1 & 0.958 & 0.936 & 0.978 & 0.989 & 0.988 & 0.988 & 0.947 & 0.959 & 0.978 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.958 & 0.580 & 0.858 & 0.958 & 0.958 & 1 & 0.936 & 0.958 & 0.958 & 0.958 & 0.958 & 0.947 & 0.958 & 0.958 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.936 & 0.580 & 0.319 & 0.936 & 0.580 & 0.858 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 1 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 0.936 & 0.936 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.978 & 0.978 & 0.958 & 0.936 & 1 & 0.978 & 0.978 & 0.978 & 0.947 & 0.959 & 0.981 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.989 & 0.989 & 0.958 & 0.936 & 0.978 & 1 & 0.988 & 0.988 & 0.947 & 0.959 & 0.978 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.988 & 0.988 & 0.958 & 0.936 & 0.978 & 0.988 & 1 & 0.995 & 0.947 & 0.959 & 0.978 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.988 & 0.988 & 0.958 & 0.936 & 0.978 & 0.988 & 0.995 & 1 & 0.947 & 0.959 & 0.978 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.976 & 0.580 & 0.319 & 0.947 & 0.580 & 0.858 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.936 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 1 & 0.947 & 0.947 & 0.956 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.973 & 0.580 & 0.858 & 0.959 & 0.959 & 0.958 & 0.936 & 0.959 & 0.959 & 0.959 & 0.959 & 0.947 & 1 & 0.959 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.947 & 0.580 & 0.319 & 0.959 & 0.580 & 0.858 & 0.978 & 0.978 & 0.958 & 0.936 & 0.981 & 0.978 & 0.978 & 0.978 & 0.947 & 0.959 & 1 & 0.947 \\
0.580 & 0.580 & 0.956 & 0.580 & 0.319 & 0.947 & 0.580 & 0.858 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.936 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.947 & 0.956 & 0.947 & 0.947 & 1
\end{pmatrix}$$

取 $\lambda=0.817$ 时，国际市场划分成4类：$\{x_1\}$，$\{x_2,x_4,x_7\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3,x_{17},x_{20},x_6,x_{18},x_9,x_{10},x_{14},x_{15},x_{16},x_{13},x_{19},x_{11},x_{12},x_8\}$.

第一市场组群：美国，最发达国家或地区；

第二市场组群：加拿大、澳大利亚、日本，工业发达国家或地区；

第三市场组群：中国香港，自由贸易区；

第四市场组群：其他15个国家或地区.

取 $\lambda=0.773$ 时，国际市场划分成3类：$\{x_1,x_2,x_4,x_7\}$，$\{x_5\}$，$\{x_3,x_{17},x_{20},x_6,x_{18},x_9,x_{10},x_{14},x_{15},x_{16},x_{13},x_{19},x_{11},x_{12},x_8\}$.

第一市场组群：美国、加拿大、澳大利亚、日本；

第二市场组群：中国香港；

第三市场组群：其他15个国家或地区.

由此可见，模糊聚类分析恰好反映了国际市场的动态市场划分，便于制定进出口商品结构，用以指导国际贸易活动.

详细的动态聚类图如图2.14所示.

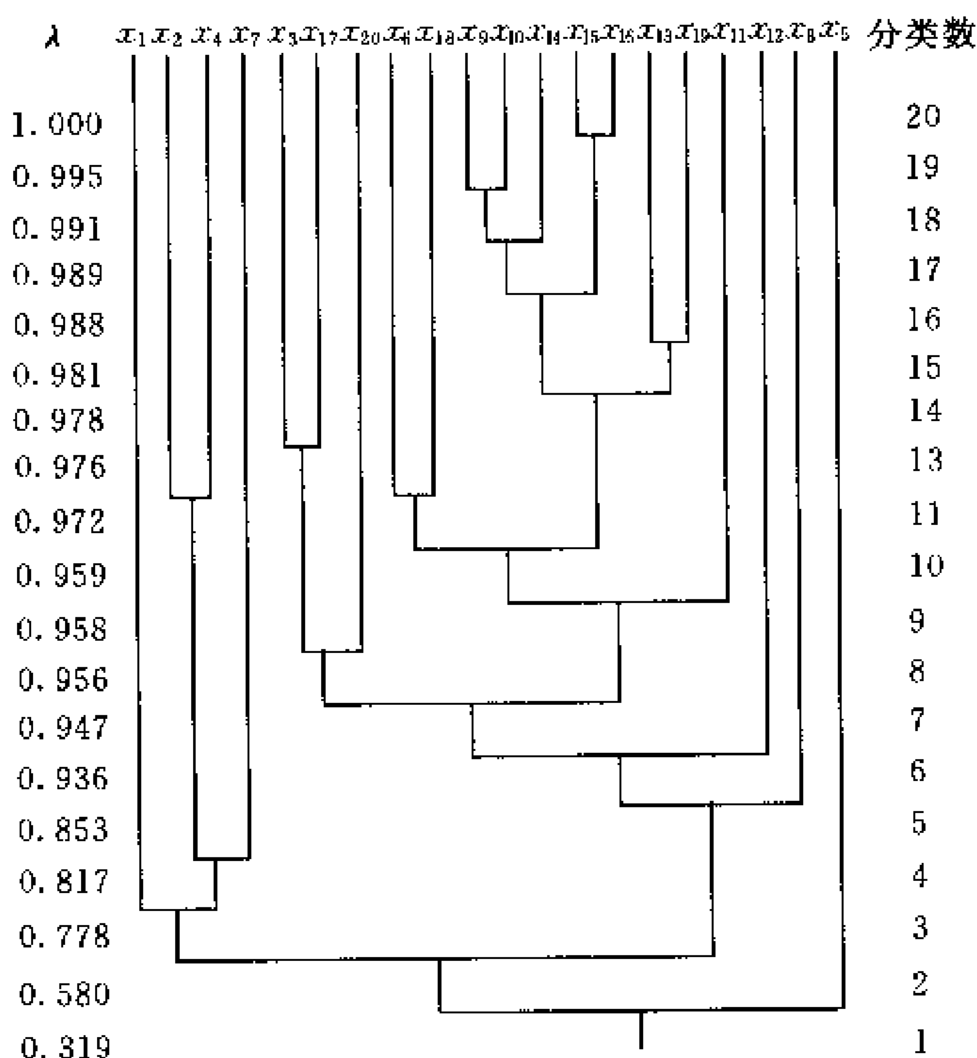


图2.14

习 题 2

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.4 & 0.1 & 0\\0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.7\\1 & 0.1 & 0.6 & 0.7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0.6 & 0.1\\0.5 & 0.7\\0.2 & 1\\0 & 0.3\end{pmatrix}$,

试计算$A\circ B$,$A\circ B^{c}$.

2. 设$R_1=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.5\\0.1 & 0.9 & 1 & 0.7\end{pmatrix}$, $R_2=\begin{pmatrix}0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.6\\0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.5\\0.6 & 0.8 & 0.7 & 0.6\end{pmatrix}$,

$$R_3=\begin{pmatrix}0.6 & 0.5\\0.7 & 0.8\\1 & 0.9\\0.2 & 0.3\end{pmatrix},\quad R_4=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\0.6 & 0.4\\0.5 & 0.5\\0.4 & 0.6\end{pmatrix},$$

$$R_5=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3 & 0.7\\0.6 & 0.4 & 0.8\end{pmatrix},\quad R_6=\begin{pmatrix}0.2 & 0.6 & 0.9\\0.3 & 0.2 & 0.1\end{pmatrix}.$$

试求$(R_1\cup R_2)\circ(R_3\circ R_5)$,$(R_1^C\circ(R_3\cap R_4))\circ R_6$.

3. 试证模糊矩阵下列性质:

(1) $(A\cup B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$;

(3) $A\subseteq B,C\subseteq D\Leftrightarrow A\cup C\subseteq B\cup D,A\cap C\subseteq B\cap D$;

(4) $(A^{\mathrm{T}})_\lambda=(A_\lambda)^{\mathrm{T}}$.

4. 用数学归纳法证明:对于$A\in\mathscr{M}_{n\times n}$,有

(1) $(A^n)_\lambda=(A_\lambda)^n$, $\forall\ \lambda\in[0,1]$; (2) $(A^n)^{\mathrm{T}}=(R^{\mathrm{T}})^n$.

5. 试证:若A,B可交换,则$(A\circ B)^k=A^k\circ B^k$.

6. 试证$(I\cup A)^m=I\cup A\cup A^2\cup\cdots\cup A^m$.

7. 设A,B是模糊对称矩阵,证明:$A\cup B$,$A\cap B$,A^k $(k\geqslant1)$都是模糊对称矩阵.

8. 设A、B是模糊自反矩阵,证明:$A\cup B$,$A\cap B$,$A\circ B$,A^k $(k\geqslant1)$都是模糊自反矩阵.

9. 设$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.8\\0.5 & 0.3\end{pmatrix}$,求$t(A)$.

10. 在实数集R中给出相等关系("=")的集合表示,并讨论"="的自反性、对称性、传递性.

11. 设$\underset{\sim}{A}$是模糊集,在$\mathscr{F}(U)$中给定包含关系"$\subseteq$",证明:"$\subseteq$"是自反的、传递的,举例说明"$\subseteq$"不是对称的.

12. 在实数集R中给出关系

$$f=\{(x,x^2):x\in \mathbf{R}\},$$

讨论f的自反性、对称性和传递性.

13. 模糊关系的合成 在中医诊断中存在模糊关系:

$$\boldsymbol{R}_1=\underset{\begin{matrix}自汗&恶寒&咳嗽&喘\end{matrix}}{\begin{pmatrix}0.3&0.3&0.3&0.7\\0.3&0.3&0.3&0.3\\0.8&0.3&0.8&0.8\\0.4&0.2&0.2&0\end{pmatrix}}\begin{matrix}寒\\热\\虚\\实\end{matrix},\quad \boldsymbol{R}_2=\underset{\begin{matrix}肺&心\end{matrix}}{\begin{pmatrix}0.5&0.3\\0.3&0.3\\0.8&0.2\\0.6&0.3\end{pmatrix}}\begin{matrix}自汗\\恶寒\\咳嗽\\喘\end{matrix},$$

试建立{寒,热,虚,实}等症状与{肺,心}之间模糊关系$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2$.

14. 设$\boldsymbol{R}$是模糊等价矩阵,证明:$\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}\ (k\geqslant 1)$.

15. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是二阶模糊相似矩阵,证明:

(1) $\boldsymbol{A}$是模糊等价矩阵;

(2) $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}$;

(3) $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$都是模糊等价矩阵.

16. 举例说明,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是模糊相似矩阵,但$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$不是模糊相似矩阵.

17. 举例说明,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是模糊等价矩阵,但$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$不是模糊等价矩阵.

18. 设

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.1&0.2&0.3\\0.1&1&0.1&0.2\\0.2&0.1&1&0.1\\0.3&0.2&0.1&1\end{pmatrix},$$

试求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$,并作聚类图.

19. 甲、乙、丙、丁4人面貌"彼此相像"的模糊关系如下:

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0.5&0.4&0.8\\0.5&1&0.7&0.5\\0.4&0.7&1&0.6\\0.8&0.5&0.6&1\end{pmatrix},$$

试求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$,并作聚类图.

20. 设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_7\}$,且

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1&0&0.1&0&0.8&1&0.6\\0&1&0&1&1&0.8&1\\0.1&0&1&0.7&0.6&0&0.1\\0&1&0.7&1&0&0.9&0\\0.8&0&0.6&0&1&0.7&0.5\\1&0.8&0&0.9&0.7&1&0.4\\0.6&1&0.1&0&0.5&0.4&1\end{pmatrix},$$

试求传递闭包$t(\boldsymbol{R})$，并作聚类图.

21. 已知模糊相似关系$\boldsymbol{R}\in\mathscr{F}(X\times X)$，

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\},$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.9 & 1.0 & 0.4\\ 0.9 & 1 & 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.7 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.7 & 0.1 & 0.4\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.7 & 0.9\\ 0.9 & 0.5 & 0.7 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.1\\ 1.0 & 0.4 & 0.1 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.5\\ 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.9 & 0.1 & 0.5 & 1\end{pmatrix},$$

试求$\boldsymbol{R}$的传递闭包，并作聚类图.

22. 求上题中与$\boldsymbol{R}$对应的模糊图的最大树，并用最大树法求聚类图.

23. 模糊分类 根据某地区1972—1978年作物赤霉病的有关历史资料，可得模糊相似矩阵如下(对称部分略)：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.11 & 0.69 & 0.35 & 0.39 & 0.45 & 0.79\\ & 1 & 0.15 & 0.81 & 0.66 & 0.52 & 0.01\\ & & 1 & 0.23 & 0.52 & 0.35 & 0.79\\ & & & 1 & 0.38 & 0.65 & 0.27\\ & & & & 1 & 0.44 & 0.36\\ & & & & & 1 & 0.35\\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}72\\73\\74\\75\\76\\77\\78\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}72 & 73 & 74 & 75 & 76 & 77 & 78\end{matrix}$$

试用传递闭包法按病害程度对7年进行分类.

24. 预报 某地历史上虫害情况分为Ⅰ(轻)、Ⅱ(中)、Ⅲ(重)3类，今年的测报资料为N，其相似关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 0.39 & 1 & & \\ 0.16 & 0.55 & 1 & \\ 0.59 & 0.41 & 0.26 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\text{Ⅰ}\\\text{Ⅱ}\\\text{Ⅲ}\\N\end{matrix},$$

$$\begin{matrix}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} & N\end{matrix}$$

问今年虫害程度如何.

25. 设有4种产品，它们的指标如下：

$$X_1=(37,38,12,16,13,12),\quad X_2=(69,73,74,22,64,17),$$

$$X_3=(73,86,49,27,68,39),\quad X_4=(57,58,64,84,63,28).$$

试用相关系数法建立相似矩阵，并用传递闭包法进行模糊聚类.

26. 设$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,其中

$$u_1=(50,0.8,1.2),\quad u_2=(60,0.7,1.4),\quad u_3=(55,0.8,1.3),$$
$$u_4=(45,0.9,1.7),\quad u_5=(44,0.8,1.7),$$

试采用算术平均值最小方法建立相似矩阵,用布尔矩阵法进行聚类分析.

27. 模糊聚类分析　设有8个企业,记为$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_8\}$,对每个企业用以下3个指标来刻画企业的技术密集水平:生产工人劳动生产率、每百万元固定资产所容纳的职工人数和技术管理人员在职工中的比重,令$u_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3})$,$x_{i1},x_{i2},x_{i3}$依次表示上述3个指标.

$$u_1=(1.8,95,0.15),\quad u_2=(2.1,99,0.21),$$
$$u_3=(3.2,101,0.18),\quad u_4=(2.2,103,0.17),$$
$$u_5=(2.5,98,0.16),\quad u_6=(2.8,102,0.20),$$
$$u_7=(1.9,120,0.09),\quad u_8=(2.0,130,0.11).$$

其中第一个指标的单位是万元/(年·人),试用绝对值指数法进行聚类分析.

28. 设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$,其中

$$x_1=(0.5,5,10),\quad x_4=(0.7,8,22),$$
$$x_2=(0.6,4,12),\quad x_5=(0.5,5,10),$$
$$x_3=(1.2,9,25),\quad x_6=(0.8,12,28).$$

采用平移·标准差变换进行数据预处理,然后用绝对值指数法计算相似度,并作聚类分析.

第3章　模糊模型识别

已知某类事物的若干标准模型，现有这类事物中的一个具体对象，应把它归到哪一种模型呢？这就是模型识别问题.本章主要介绍模糊模型识别的两种基本方法——最大隶属原则方法和择近原则方法.

3.1　模糊模型识别简介

3.1.1　模型识别

模型识别在实际问题中是普遍存在的.例如：学生到野外采集到一个植物标本，要识别它属于哪一纲哪一目；投递员（或分拣机）在分拣信件时，要识别邮政编码；等等.这些都是模型识别.它们有两个本质的特征：一是事先已知若干标准模型（称为标准模型库），二是有待识别的对象.上述例子中，事先建立的植物标本室、信封背面提供的10个标准阿拉伯数字都是标准模型库，采集到的每一种植物、分拣的每一封信都是待识别的对象.因此，粗略地讲，模型识别就是根据研究对象的某些特征对其进行识别并分类.

3.1.2　模糊模型识别的概念

所谓模糊模型识别，是指在模型识别中，模型是模糊的.也就是说，标准模型库中提供的模型是模糊的.

例3.1.1　苹果的分级问题　设论域$U=\{$若干苹果$\}$.果农把苹果摘下来后，要经过挑选分级.一般按照苹果的大小、色泽、有无损伤等特征来分级，从而得到标准模型库$=\{$Ⅰ级，Ⅱ级，Ⅲ级，Ⅳ级$\}$，其中的模型Ⅰ级、Ⅱ级、Ⅲ级、Ⅳ级是模糊的.果农拿到一个苹果u_0后，到底放到"Ⅰ级"筐里，还是放到"Ⅱ级"筐里，这就是元素对标准模糊集的识别问题.

例3.1.2　识别问题　医生给病人的诊断过程实际上是模糊模型识别过程.

设论域$U=\{$各种疾病的症候$\}$（称为症候群空间），各种疾病都有典型的症状，由长期临床积累的经验，得标准模型库$=\{$心脏病，胃溃疡，感冒，…$\}$，显然，模型（疾病）都是模糊的.病人向医生诉说症状（也是模糊的），由医生将病人的症状与标准模型库的模型作比较后下诊断.这是一个模糊识别过程，也是一个模糊集对标准模糊集的识别问题.

上述两类问题的待识别对象,一类是具体的,一类是模糊的,他们都有一个度量标准,这就是下面要讨论的隶属程度与贴近程度.

3.2 第一类模糊模型识别

3.2.1 模糊向量

定义 3.2.1 称向量

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

为模糊向量,其中 $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 若 $a_i \in \{0,1\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为布尔向量.

由1.1.3节模糊集的向量表示法知,模糊向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以表示论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的模糊集$\underset{\sim}{A}$,只要记

$$a_i = \underset{\sim}{A}(x_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

又由2.2.1节模糊矩阵知,模糊向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可看成是一个$1\times n$模糊矩阵.于是,模糊向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$也可表示论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的模糊关系.

因此,完全可以类似地定义模糊向量的"相等"与"包含",以及交、并、余运算.这里不再重复了.

定义 3.2.2 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \mathscr{M}_{1\times n}$,则称

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge b_i)$$

为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的内积;称

$$\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} = \bigwedge_{i=1}^{n} (a_i \vee b_i)$$

为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的外积.

例 3.2.1 设$\boldsymbol{a}=(0.1,0.5,0,0.6)$,$\boldsymbol{b}=(0.2,0,0.7,0.3)$,则$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=0.3$,$\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0.2$.

内积与外积有如下简单的性质(为方便起见,在区间[0,1]中定义"余"运算:对任意$a\in[0,1]$,$a^C \overset{\text{def}}{=\!=} 1-a$).

1° $(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})^C=\boldsymbol{a}^C\odot\boldsymbol{b}^C$, $\quad(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^C=\boldsymbol{a}^C\circ\boldsymbol{b}^C$.

2° 设$\bar{a}=\bigvee_{i=1}^{n} a_i$,$\underline{a}=\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$分别称为$\boldsymbol{a}$的高和底,则$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{a}=\bar{a}$,$\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{a}=\underline{a}$.

3° 若$\boldsymbol{a}\subseteq\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\bar{a}$,$\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\underline{b}$.

证 1° $(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})^C=1-\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=1-\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)=\bigwedge_{i=1}^{n}[1-(a_i\wedge b_i)]$

$$=\bigwedge_{i=1}^{n}[(1-a_i)\vee(1-b_i)]=\bigwedge_{i=1}^{n}[(a_i)^C\vee(b_i)^C]=\boldsymbol{a}^C\odot\boldsymbol{b}^C.$$

由上述结果,有

$$(\boldsymbol{a}^C \circ \boldsymbol{b}^C)^C = \boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}.$$

对以上等式两边取余，得

$$\boldsymbol{a}^C \circ \boldsymbol{b}^C = (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^C.$$

2° 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a} = \bigvee_{i=1}^{n}(a_i \wedge a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bar{a},$$

$$\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{a} = \bigwedge_{i=1}^{n}(a_i \vee a_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \underline{a}.$$

3° 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 因为$\boldsymbol{a}\subseteq\boldsymbol{b}$，所以

$$a_i \leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \bigvee_{i=1}^{n}(a_i \wedge b_i) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i = \bar{a},$$

$$\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b} = \bigwedge_{i=1}^{n}(a_i \vee b_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} b_i = \underline{b}.$$

定义 3.2.3　设$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$是论域$U$上的$n$个模糊子集，称以模糊集$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$为分量的模糊向量为模糊向量集合族，记为$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n)$.

例如，在小麦育种工作中，提供的早熟、矮秆、大粒等优良品种，实际上是一个模糊集，记$\underset{\sim}{A}$＝“早熟品种”，而描述早熟品种的每一个特性也都是模糊子集. 因此

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\,(\text{早熟}) = (\underset{\sim}{A}_1(\text{抽穗期}),\underset{\sim}{A}_2(\text{株高}),\underset{\sim}{A}_3(\text{有效穗数}),$$
$$\underset{\sim}{A}_4(\text{主穗粒数}),\underset{\sim}{A}_5(\text{百粒重}))$$

就是一个模糊向量集合族.

定义 3.2.4　设论域U上有n个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$，其隶属函数为$\underset{\sim}{A}_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，而$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n)$为模糊向量集合族. $\boldsymbol{x}^\circ=(x^\circ_1,x^\circ_2,\cdots,x^\circ_n)$为普通向量，则称

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\,(\boldsymbol{x}^\circ) = \bigwedge_{i=1}^{n}\{\underset{\sim}{A}_i(x^\circ_i)\}$$

为$\boldsymbol{x}^\circ$对模糊向量集合族$\underset{\sim}{A}$的隶属度.

需要指出的是，普通向量$\boldsymbol{x}^\circ$对模糊向量集合族的隶属度也有其他定义方式，如

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\,(\boldsymbol{x}^\circ) \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_i(x^\circ_i).$$

3.2.2　最大隶属原则

最大隶属原则Ⅰ　设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上有m个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots$，$\underset{\sim}{A}_m$(即$m$个模型)，构成一个标准模型库，若对任一$x_0\in U$，有$i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$\underset{\sim}{A}_{i_0}(x_0) = \bigvee_{k=1}^{m}\underset{\sim}{A}_k(x_0),$$

则认为x_0相对隶属于$\underset{\sim}{A}_{i_0}$.

例 3.2.2 学习成绩的模糊识别 在论域$U=[0,100]$(分数)上确定三个表示学习成绩的模糊集$\underset{\sim}{A}$="优",$\underset{\sim}{B}$="良",$\underset{\sim}{C}$="差".当一位同学的数学成绩为88分时,该同学的数学成绩是评为优、良,还是差?

解 先建立模糊集$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{C}$的隶属函数.在例1.5.2中,曾用指派方法建立了论域$U=[0,100]$(分数)的$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{C}$的隶属函数:

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 85,\\ (x-85)/10, & 85<x\leqslant 95,\\ 1, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 70,\\ (x-70)/10, & 70<x\leqslant 80,\\ 1, & 80<x\leqslant 85,\\ (95-x)/10, & 85\leqslant x\leqslant 95,\\ 0, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{C}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 70,\\ (80-x)/10, & 70<x\leqslant 80,\\ 0, & 80<x\leqslant 100.\end{cases}$$

将$x=88$代入隶属函数计算,得

$$\underset{\sim}{A}(88)=0.8,\quad \underset{\sim}{B}(88)=0.7,\quad \underset{\sim}{C}(88)=0.$$

根据最大隶属原则Ⅰ,该同学的数学成绩相对于三个模型应隶属于$\underset{\sim}{A}$,可评为优.

最大隶属原则Ⅱ 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上有一个标准模型$\underset{\sim}{A}$,待识别的对象有n个,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in U$.如果有某个x_k满足

$$\underset{\sim}{A}(x_k)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\underset{\sim}{A}(x_i)\},$$

则应优先录取x_k.

例 3.2.3 学习成绩的模糊识别 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3\}$(3个学生的英语成绩),在U上定义一个模糊集$\underset{\sim}{B}$="良",待识别的对象有3个:$x_1=74$,$x_2=82$,$x_3=88$,仍选用例3.2.2中模糊集$\underset{\sim}{B}$="良"的隶属函数$\underset{\sim}{B}(x)$.

现将$x_1=74$,$x_2=82$,$x_3=88$分别代入$\underset{\sim}{B}(x)$计算,得

$$\underset{\sim}{B}(74)=0.4,\quad \underset{\sim}{B}(82)=1,\quad \underset{\sim}{B}(88)=0.7.$$

由于82分隶属$\underset{\sim}{B}$="良"的程度最大,所以第二个学生的英语成绩x_2最靠近"良".

例 3.2.4 细胞染色体形状的模糊识别 细胞染色体形状的模糊识别就是几何图形的模糊识别,而几何图形又常常划分为若干个三角形图形,故设论域为三角形全体,即

$$U=\{\triangle(A,B,C)\mid A+B+C=180,A\geqslant B\geqslant C\},$$

标准模型库＝{$\underset{\sim}{E}$(正三角形)，$\underset{\sim}{R}$(直角三角形)，$\underset{\sim}{I}$(等腰三角形)，$\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R}$(等腰直角三角形)，$\underset{\sim}{T}$(任意三角形)}.

某人在实验中观察到一染色体的几何形状，测得其三个内角分别为94，50，36(这里省略单位)，即待识别的对象$x_0=(94,50,36)$. 问x_0应隶属于哪一种三角形. 这就是元素对标准模糊集的识别问题，下面应用最大隶属原则Ⅰ来求解.

我们想用此例说明，如何用推理方法建立隶属函数. 实际上，对于有的模糊集，可利用专业知识(这里主要利用几何知识)，通过逻辑推理加上尝试方法，就可得到较为合理的隶属函数.

(1) 建立直角三角形$\underset{\sim}{R}$的隶属函数.

由几何知识可知，$\underset{\sim}{R}$的隶属函数$\underset{\sim}{R}(A,B,C)$应满足下列约束条件：

1° 当$A=90°$时，$\underset{\sim}{R}(A,B,C)=1$；

2° 当$A=180°$时，$\underset{\sim}{R}(A,B,C)=0$；

3° $0\leqslant\underset{\sim}{R}(A,B,C)\leqslant 1$.

而且直角三角形$\underset{\sim}{R}$的特征是最大角度与90°之差越小，则$\underset{\sim}{R}$越像直角三角形. 因此，不妨把$\underset{\sim}{R}$的隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{R}(A,B,C)=1-k|A-90|,$$

其中k为待定常数. 这样定义的隶属函数$\underset{\sim}{R}(A,B,C)$明显地满足约束条件1°，由约束条件2°，得$k=1/90$；容易验证

$$\underset{\sim}{R}(A,B,C)=1-\frac{1}{90}|A-90|$$

也满足约束条件3°. 于是，$\underset{\sim}{R}$的隶属函数为

$$\underset{\sim}{R}(A,B,C)=1-\frac{1}{90}|A-90|.$$

(2) 建立正三角形$\underset{\sim}{E}$的隶属函数.

$\underset{\sim}{E}$的隶属函数$\underset{\sim}{E}(A,B,C)$应满足下列约束条件：

1° 当$A=B=C=60°$时，$\underset{\sim}{E}(A,B,C)=1$；

2° 当$A=180°,B=C=0°$时，$\underset{\sim}{E}(A,B,C)=0$；

3° $0\leqslant\underset{\sim}{E}(A,B,C)\leqslant 1$.

而且正三角形$\underset{\sim}{E}$的特征是最大角与最小角之差越小，则$\underset{\sim}{E}$越像正三角形. 因此，不妨把$\underset{\sim}{E}$的隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{E}(A,B,C)=1-k(A-C),$$

其中k为待定常数. 这样定义的隶属函数$\underset{\sim}{E}(A,B,C)$明显地满足约束条件1°，由约束条件2°，得$k=1/180$；容易验证

$$\underset{\sim}{E}(A,B,C)=1-\frac{1}{180}(A-C)$$

满足约束条件 3°. 于是，$\underset{\sim}{E}$的隶属函数为

$$\underset{\sim}{E}(A,B,C)=1-\frac{1}{180}(A-C).$$

(3) 建立等腰三角形$\underset{\sim}{I}$的隶属函数.

$\underset{\sim}{I}$的隶属函数$\underset{\sim}{I}(A,B,C)$应满足下列约束条件：

1° 当 $A=B$ 或 $B=C$ 时，$\underset{\sim}{I}(A,B,C)=1$；

2° 当 $A=120°,B=60°,C=0°$时，$\underset{\sim}{I}(A,B,C)=0$；

3° $0\leqslant\underset{\sim}{I}(A,B,C)\leqslant1$.

而且在一个三角形内如有两个角之差越小，则越像等腰三角形. 因此，不妨把$\underset{\sim}{I}$的隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{I}(A,B,C)=1-k[(A-B)\wedge(B-C)],$$

其中k为待定常数. 这样定义的隶属函数明显地满足约束条件1°，由约束条件2°，得$k=1/60$；容易验证

$$\underset{\sim}{I}(A,B,C)=1-\frac{1}{60}[(A-B)\wedge(B-C)]$$

满足约束条件 3°. 于是，$\underset{\sim}{I}$的隶属函数为

$$\underset{\sim}{I}(A,B,C)=1-\frac{1}{60}[(A-B)\wedge(B-C)].$$

(4) 建立等腰直角三角形($\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R}$)的隶属函数.

由于 $$(\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R})(A,B,C)\xlongequal{\text{def}}\underset{\sim}{I}(A,B,C)\wedge\underset{\sim}{R}(A,B,C),$$

所以

$$(\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R})(A,B,C)\xlongequal{\text{def}}\left\{1-\frac{1}{60}[(A-B)\wedge(B-C)]\right\}\wedge\left\{1-\frac{1}{90}|A-90|\right\}$$
$$=1-\vee\left\{\frac{1}{60}(A-B)\wedge(B-C),\frac{1}{90}|A-90|\right\}.$$

(5) 建立任意三角形($\underset{\sim}{R}^c\cap\underset{\sim}{E}^c\cap\underset{\sim}{I}$)的隶属函数.

由于任意三角形$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{R}^c\cap\underset{\sim}{E}^c\cap\underset{\sim}{I}^c$，所以任意三角形$\underset{\sim}{T}$的隶属函数为

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}(A,B,C)&\xlongequal{\text{def}}(\underset{\sim}{R}^c\cap\underset{\sim}{E}^c\cap\underset{\sim}{I}^c)(A,B,C)\\&=[1-\underset{\sim}{R}(A,B,C)]\wedge[1-\underset{\sim}{E}(A,B,C)]\wedge[1-\underset{\sim}{I}(A,B,C)]\\&=\left(\frac{1}{90}|A-90|\right)\wedge\left[\frac{1}{180}(A-C)\right]\wedge\left[\frac{1}{60}(A-B)\wedge(B-C)\right]\\&=\frac{1}{180}\{\wedge[2|A-90|,(A-C),3(A-B),3(B-C)]\}.\end{aligned}$$

待识别的三角形 $x_0=(A,B,C)=(94,50,36)$，分别计算隶属度，得

$$\underset{\sim}{E}(x_0)=0.677,\quad \underset{\sim}{R}(x_0)=0.955,\quad \underset{\sim}{I}(x_0)=0.766,$$

$$(\underset{\sim}{I}\cap \underset{\sim}{R})(x_0)=0.766,\quad \underset{\sim}{T}(x_0)=0.045.$$

按最大隶属原则，三角形 $x_0=(A,B,C)=(94,50,36)$ 相对隶属于直角三角形.

关于建立各类三角形的隶属函数，目前有多种方法. 比如也可用下列方式定义隶属函数：

$$\underset{\sim}{E}(A,B,C)\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{cases}1-(p/180)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ 1, & p=0\end{cases}\quad (p=A-C),$$

$$\underset{\sim}{R}(A,B,C)\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{cases}1-(p/90)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ 1, & p=0\end{cases}\quad (p=|A-90|),$$

$$\underset{\sim}{I}(A,B,C)\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{cases}1-(p/60)^{\frac{1}{p}}, & p\neq 0,\\ 1, & p=0\end{cases}\quad (p=\wedge\{A-B,B-C\}),$$

试用最大隶属原则，判断 $x_0=(94,50,36)$ 属于哪一类.

由于

$$\underset{\sim}{E}(x_0)=1-(58/180)^{\frac{1}{58}}=0.019,$$

$$\underset{\sim}{R}(x_0)=1-(4/90)^{\frac{1}{4}}=0.541,$$

$$\underset{\sim}{I}(x_0)=1-(14/60)^{\frac{1}{14}}=0.099,$$

$$(\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R})(x_0)=\wedge\{0.099,0.541\}=0.099,$$

$$\underset{\sim}{T}(x_0)=\wedge\{1-0.019,1-0.099,1-0.541\}=0.459,$$

按最大隶属原则，三角形(94,50,36)仍相对隶属于直角三角形.

例3.2.5　大学生体质水平的模糊识别[10]　陈蓓菲等人在福建某高校对240名男生的体质水平按《中国学生体质健康调查研究》手册上的规定进行了测试，他们从18项体测指标中选出了反映体质水平的4个主要指标，根据聚类分析法，将240名男生分成5类，然后用最大隶属原则去识别一个具体学生的体质.

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{240}\}$，用聚类方法按体质水平将学生分为5种类型，这在 U 上表现为5个模糊子集 $\underset{\sim}{A}_i\in\mathscr{T}(U)$ $(i=1,2,3,4,5)$，其含义为

$\underset{\sim}{A}_1$：体质差；　$\underset{\sim}{A}_2$：体质中下；　$\underset{\sim}{A}_3$：体质中等；　$\underset{\sim}{A}_4$：体质良；　$\underset{\sim}{A}_5$：体质优.

这就构成了论域 U 上的标准模型库 $\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{A}_5\}$.

每个标准体质 $\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$ 由4个主要指标，即身高、体重、胸围、肺活量描述. 而人体是一个复杂的模糊集合体，个子的高矮、体重的轻重、胸围的大小、肺活量的大小都是模糊概念，因此对每个标准体质 $\underset{\sim}{A}_i$ 而言，以上4个指标也是模糊集.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_i=(\underset{\sim}{A}_{i1},\underset{\sim}{A}_{i2},\underset{\sim}{A}_{i3},\underset{\sim}{A}_{i4})\quad (i=1,2,3,4,5).$$

实际上，这是一个模糊向量集合族.

5 类标准体质的 4 个主要指标的测试数据如表 3.1 所示.

表 3.1

类型	指标			
	身高/cm	体重/kg	胸围/cm	肺活量/cm^{-3}
差	158.4±3.0	47.9±8.4	84.2±2.4	3380±184.0
中下	163.4±4.8	50.0±8.6	89.0±6.2	3866±800.0
中	166.9±3.6	55.3±9.4	88.3±7.0	4128±526.0
良	172.6±4.6	57.7±8.2	89.2±6.4	4349±402.0
优	178.4±4.2	61.9±8.6	90.9±8.0	4536±756.0

现有一名待识别的学生 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(167.8,55.1,86,4120)$,他应属于哪种类型?

因为各种标准体质的身高($\underset{\sim}{A}_{i1}$)、体重($\underset{\sim}{A}_{i2}$)、胸围($\underset{\sim}{A}_{i3}$)、肺活量($\underset{\sim}{A}_{i4}$)均为正态模糊集,相应的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j)=\begin{cases}0, & |x_j-\bar{x}_j|>2s_j,\\ 1-\left(\dfrac{x_j-\bar{x}_j}{2s_j}\right)^2, & |x_j-\bar{x}_j|\leqslant 2s_j\end{cases}$$

$$(i=1,2,3,4,5;j=1,2,3,4),$$

其中 $\bar{x}_j$ 为均值,$2s_j$ 为标准差.

令

$$\underset{\sim}{A}_i(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j),\tag{3.1}$$

具体计算如下:

$$\underset{\sim}{A}_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\underset{\sim}{A}_{1j}(x_j)=\frac{1}{4}[\underset{\sim}{A}_{11}(x_1)+\underset{\sim}{A}_{12}(x_2)+\underset{\sim}{A}_{13}(x_3)+\underset{\sim}{A}_{14}(x_4)],$$

$$\underset{\sim}{A}_{11}(x_1)=\underset{\sim}{A}_{11}(167.8)=0\quad(\text{因为}|x_1-\bar{x}_1|=|167.8-158.4|>3.0=2s_1),$$

$$\underset{\sim}{A}_{12}(x_2)=\underset{\sim}{A}_{12}(55.1)=1-\left(\frac{55.1-47.9}{8.4}\right)^2=0.2653,$$

$$\underset{\sim}{A}_{13}(x_3)=\underset{\sim}{A}_{13}(86)=1-\left(\frac{86-84.2}{2.4}\right)^2=0.4375,$$

$$\underset{\sim}{A}_{14}(x_4)=\underset{\sim}{A}_{14}(4120)=0\quad(\text{因为}|x_4-\bar{x}_4|=|4120-3380|>184=2s_4).$$

由式(3.1),得

$$\underset{\sim}{A}_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4}(0+0.2653+0.4375+0)=0.1757.$$

类似地计算,得

$\underset{\sim}{A}_{21}(x_1)=0.1597$, $\underset{\sim}{A}_{22}(x_2)=0.6483$, $\underset{\sim}{A}_{23}(x_3)=0.7659$, $\underset{\sim}{A}_{24}(x_4)=0.8992$,

由式(3.1),得 $\underset{\sim}{A}_2(\boldsymbol{x})=0.6184$.

$\underset{\sim}{A}_{31}(x_1)=0.9375$， $\underset{\sim}{A}_{32}(x_2)=0.9995$， $\underset{\sim}{A}_{33}(x_3)=0.8920$， $\underset{\sim}{A}_{34}(x_4)=0.9988$，
由式(3.1)，得 $\underset{\sim}{A}_3(\boldsymbol{x})=0.9572.$

$\underset{\sim}{A}_{41}(x_1)=0$， $\underset{\sim}{A}_{42}(x_2)=0.8995$， $\underset{\sim}{A}_{43}(x_3)=0.75$， $\underset{\sim}{A}_{44}(x_4)=0.6754$，
由式(3.1)，得 $\underset{\sim}{A}_4(\boldsymbol{x})=0.5812.$

$\underset{\sim}{A}_{51}(x_1)=0$， $\underset{\sim}{A}_{52}(x_2)=0.3748$， $\underset{\sim}{A}_{53}(x_3)=0.6248$， $\underset{\sim}{A}_{54}(x_4)=0.6972$，
由式(3.1)，得 $\underset{\sim}{A}_5(\boldsymbol{x})=0.4242.$

按最大隶属原则，待识别的学生$\boldsymbol{x}=(167.8,55.1,86,4120)$属于$\underset{\sim}{A}_3$(体质中等).

若用下列公式

$$\underset{\sim}{A}_i(\boldsymbol{x})=\bigwedge_{j=1}^{4}\{\underset{\sim}{A}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)\},$$

得
$$\underset{\sim}{A}_1(\boldsymbol{x})=\wedge\{0,0.2653,0.4375,0\}=0,$$
$$\underset{\sim}{A}_2(\boldsymbol{x})=\wedge\{0.1597,0.6483,0.7659,0.8992\}=0.1597,$$
$$\underset{\sim}{A}_3(\boldsymbol{x})=\wedge\{0.9375,0.9995,0.8920,0.9998\}=0.8920,$$
$$\underset{\sim}{A}_4(\boldsymbol{x})=\wedge\{0,0.8995,0.75,0.6754\}=0,$$
$$\underset{\sim}{A}_5(\boldsymbol{x})=\wedge\{0,0.3748,0.6248,0.6972\}=0.$$
则按最大隶属原则，待识别的学生$\boldsymbol{x}=(167.8,55.1,86,4120)$也属于$\underset{\sim}{A}_3$(体质中等).

3.2.3 阈值原则

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上有m个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_m$(即$m$个模型)，这构成了一个标准模型库. 对任一$x_0\in U$，取定水平$\alpha\in[0,1]$. 若存在$i_1,i_2,\cdots,i_k$，使$\underset{\sim}{A}_{i_j}(x_0)\geqslant\alpha$ $(j=1,2,\cdots,k)$，则判决为：x_0相对地隶属于$\underset{\sim}{A}_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap\underset{\sim}{A}_{i_k}$. 若$\bigvee_{k=1}^{m}\underset{\sim}{A}_k(x_0)<\alpha$，则判决为：不能识别，应当找原因另作分析.

该方法也可以对x_0与某一个标准模型$\underset{\sim}{A}_k$进行识别. 若$\underset{\sim}{A}_k(x_0)\geqslant\alpha$，则认为$x_0$相对隶属于$\underset{\sim}{A}_k$；若$\underset{\sim}{A}_k(x_0)<\alpha$，则认为$x_0$相对不隶属于$\underset{\sim}{A}_k$.

在例3.2.2中，若取水平$\alpha=0.7$，则按阈值原则，$x_0=(94,50,36)$相对隶属于$\underset{\sim}{I}\cap\underset{\sim}{R}$，即相对隶属于等腰直角三角形. 若取水平$\alpha=0.9$，由$\underset{\sim}{R}(x_0)=0.955>0.9$，可认为$x_0=(94,50,36)$相对隶属于$\underset{\sim}{R}$，即相对隶属于直角三角形.

3.3 第二类模糊模型识别

这一节讨论的是第二类模糊识别问题. 设在论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上有m个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_m$ (m个模型)，构成了标准模型库. 被识别的对象$\underset{\sim}{B}$也是一个模糊集，$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$中的哪一个最贴近？这就是一个模糊集对标准

模糊集的识别问题. 因此,这里涉及两个模糊集的贴近程度问题.

3.3.1 贴近度

先把模糊向量的内积与外积推广到无限论域U上,有以下定义.

定义 3.3.1 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$,称

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\bigvee_{x\in U}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)] \tag{3.2}$$

为$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$的内积;称

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\bigwedge_{x\in U}[\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)] \tag{3.3}$$

为$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$的外积.

需要指出:内积与外积的简单性质(3.3.2 节)对无限论域U上的模糊集也成立. 现列在下面,其证明留作习题.

内积与外积有如下性质:

1° 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$,则有

$$(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\odot\underset{\sim}{B}^C,\quad (\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\circ\underset{\sim}{B}^C.$$

2° 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$,则有

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}=\overline{\underset{\sim}{A}},\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{A}=\underline{\underset{\sim}{A}};$$

$$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Rightarrow\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\overline{\underset{\sim}{A}},\quad \underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\Rightarrow\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\underline{\underset{\sim}{A}}.$$

3° 设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$,则有

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}\leqslant\overline{\underset{\sim}{A}}\wedge\overline{\underset{\sim}{B}},\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\geqslant\underline{\underset{\sim}{A}}\vee\underline{\underset{\sim}{B}};$$

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}^C\leqslant\frac{1}{2},\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{A}^C\geqslant\frac{1}{2}.$$

例 3.3.1 设

$$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\},$$

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.4}{x_6},$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{0.6}{x_6},$$

则$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的内积、外积分别为

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=0.8,\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=0.6.$$

可见,在论域U为有限时,模糊集的内(外)积与模糊向量的内(外)积是一致的.

例 3.3.2 设论域U为实数域,其上有两个正态模糊集$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$,它们的隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}\ (\sigma_1>0),\quad \underset{\sim}{B}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}\ (\sigma_2>0).$$

试求$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$.

如图 3.1 所示，由定义知，$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$应为$\underset{\sim}{A}(x)$与$\underset{\sim}{B}(x)$曲线交点处的纵坐标，即$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}(x^*)$. 而$x^*$是交点的横坐标，并满足方程

$$\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2=\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2,\quad a_1<x^*<a_2,$$

图 3.1

由$\dfrac{x^*-a_1}{\sigma_1}=\dfrac{a_2-x^*}{\sigma_2}$得，$x^*=\dfrac{\sigma_2a_1+\sigma_1a_2}{\sigma_1+\sigma_2}$.

由$\dfrac{x'-a_1}{\sigma_1}=\dfrac{x'-a_2}{\sigma_2}$得，$x'=\dfrac{\sigma_2a_1-\sigma_1a_2}{\sigma_2-\sigma_1}$，因为$x'$不在$a_1,a_2$之间，所以舍去$x'$.

$$\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}, & -\infty<x\leqslant x^*,\\ e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}, & x^*\leqslant x<+\infty;\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}, & -\infty<x\leqslant x^*,\\ e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}, & x^*\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

于是
$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}(x^*)=e^{-\left(\frac{x^*-a_1}{\sigma_1}\right)^2}=e^{-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2}.$$

因为
$$\lim_{x\to\infty}\underset{\sim}{A}(x)=\lim_{x\to\infty}\underset{\sim}{B}(x)=0,$$

所以
$$A\odot B=\bigwedge_{x\in U}(\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x))=0.$$

由模糊集内积与外积的性质可知，单独使用内积或外积还不能完全刻画两个模糊集$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$之间的贴近程度. 模糊集的内积与外积都只能部分地表现两个模糊集的贴近程度. 下面从直观上进一步说明这一点.

在图 3.2 中所表示的两个模糊集$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$交点的纵坐标(隶属度$\mu$)越大时，$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$越贴近；而内积$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\bigvee_{x\in U}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)]$正是表现了模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$交点的纵坐标(隶属度). 在图 3.3 中所表示的两个模糊集$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$交点的纵坐标(隶属度μ)越小时，$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$越贴近；而外积$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\bigwedge_{x\in U}[\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)]$正好表现了这一点.

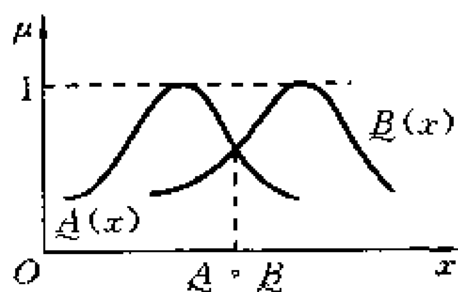


图 3.2

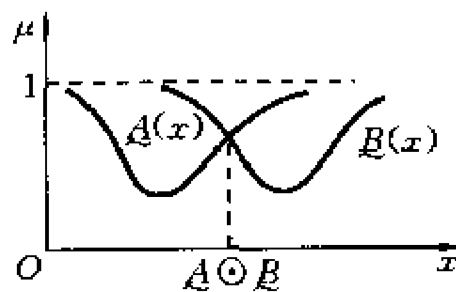


图 3.3

综上所述，内积越大，模糊集越贴近；外积越小，模糊集也越贴近. 因此，人们就用二者相结合的“格贴近度”来刻画两个模糊集的贴近程度.

定义 3.3.2　设$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$是论域$U$上的模糊子集，则称

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})] \tag{3.4}$$

为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的格贴近度.

可见,当$\sigma_0(A,B)$越大(亦即$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$越大,$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$越小)时,$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$越贴近.

有了格贴近度的定义后,就容易计算例 3.3.1 与例 3.3.2 中的格贴近度.

例3.3.1 中,　　$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.8+(1-0.6)]=0.6$;

例3.3.2 中,　　$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2}+1]$.　　(3.5)

显然,格贴近度具有下列性质:

1° $0\leqslant\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\leqslant 1$;

2° $\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=\frac{1}{2}[\overline{\underset{\sim}{A}}+(1-\underline{\underset{\sim}{A}})]$,当$\overline{\underset{\sim}{A}}=1$,$\underline{\underset{\sim}{A}}=0$时,有

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1,\quad \sigma(U,\varnothing)=0;$$

3° 若$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$,则

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma_0(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}).$$

例3.3.3　设　$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{1}{x_5},$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.4}{x_4}+\frac{0.9}{x_5},$$

则由　$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=0.9,\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=0.1,$

得　$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.9+(1-0.1)]=0.9;$

由　$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}=\overline{\underset{\sim}{A}}=1,\quad \underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{A}=\underline{\underset{\sim}{A}}=0.1,$

得　$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=\frac{1}{2}[1+(1-0.1)]=0.95;$

由　$\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{B}=\overline{\underset{\sim}{B}}=0.9,\quad \underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{B}=\underline{\underset{\sim}{B}}=0,$

得　$\sigma_0(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.9+(1-0)]=0.95.$

由例3.3.3 可看出,当$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$都有完全属于自己和完全不属于自己的元素时,格贴近度$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$是一个比较公正、客观的度量,这也是格贴近度的性质2°和性质3°所体现的.

用贴近度描述了模糊集之间彼此贴近的程度,是我国学者汪培庄教授首先提出来的. 实际上,由于所研究问题的性质不同,还有其他的贴近度定义. 比如:

设$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$是论域U上的模糊集,则称

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\wedge(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^C$$

为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度.

3.3.2 择近原则

设论域U上有m个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_m$,构成一个标准模型库$\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_m\}$,$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$为待识别的模型.若存在$i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$,使得

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_{i_0},\underset{\sim}{B})=\bigvee_{k=1}^{m}\sigma_0(\underset{\sim}{A}_k,\underset{\sim}{B}),\tag{3.6}$$

则称$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_{i_0}$最贴近,或者说把$\underset{\sim}{B}$归并到$\underset{\sim}{A}_{i_0}$类.

例3.3.4 小麦品种的模糊识别 设论域$U=\{$小麦$\}$,由5种小麦优良品种构成的标准模型库为$\{\underset{\sim}{A}_1$(早熟),$\underset{\sim}{A}_2$(矮杆),$\underset{\sim}{A}_3$(大粒),$\underset{\sim}{A}_4$(高肥丰产),$\underset{\sim}{A}_5$(中肥丰产)$\}$.此处只讨论小麦百粒重这一特性.根据抽样实测结果,利用统计方法,已知5种优良品种的百粒重分别为如下的正态模糊集:

$\underset{\sim}{A}_1$(早熟) $\underset{\sim}{A}_1(x)=e^{-\left(\frac{x-3.7}{0.3}\right)^2}$, $\underset{\sim}{A}_2$(矮杆) $\underset{\sim}{A}_2(x)=e^{-\left(\frac{x-2.9}{0.3}\right)^2}$,

$\underset{\sim}{A}_3$(大粒) $\underset{\sim}{A}_3(x)=e^{-\left(\frac{x-5.6}{0.3}\right)^2}$, $\underset{\sim}{A}_4$(高肥丰产) $\underset{\sim}{A}_4(x)=e^{-\left(\frac{x-3.9}{0.3}\right)^2}$,

$\underset{\sim}{A}_5$(中肥丰产) $\underset{\sim}{A}_5(x)=e^{-\left(\frac{x-3.7}{0.2}\right)^2}$.

现有一小麦品种$\underset{\sim}{B}$,用统计方法得知它的百粒重隶属函数为

$$\underset{\sim}{B}(x)=e^{-\left(\frac{x-3.43}{0.28}\right)^2},$$

现在要求识别从百粒重这一特性上看,$\underset{\sim}{B}$隶属于哪一品种.

这里涉及两个正态模糊集的贴近度,由式(3.5),得

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}\left[e^{-\left(\frac{3.43-3.7}{0.3+0.28}\right)^2}+1\right]\approx 0.90,$$

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})\approx 0.72,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.50,$$

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{B})\approx 0.76,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{B})=0.86.$$

所以,从百粒重这一特性看,根据择近原则,$\underset{\sim}{B}$归并到$\underset{\sim}{A}_1$类,即为早熟品种.

例3.3.5 企业管理 一个公司在社会上的声誉是一个模糊概念,它是由多个因素决定的.设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$.其中$x_1$:管理质量;$x_2$:员工才能;$x_3$:长期投资价值;$x_4$:财务健全;$x_5$:善用公司资产;$x_6$:产品质量和服务质量.

一个公司的"声誉"可以认为是论域U上的模糊集.现有4个公司的"声誉"模型$\underset{\sim}{A}_1$、$\underset{\sim}{A}_2$、$\underset{\sim}{A}_3$、$\underset{\sim}{A}_4$与相应的管理模式$\underset{\sim}{D}_i$ $(i=1,2,3,4)$以及待识别的某公司的"声誉"$\underset{\sim}{B}$(表3.2).

用择近法原则识别$\underset{\sim}{B}$.用格贴近度公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})],$$

表 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	相应的管理模式
$\underset{\sim}{A}_1$	0.92	0.83	0.88	0.90	0.83	0.90	$\underset{\sim}{D}_1$
$\underset{\sim}{A}_2$	0.88	0.86	0.85	0.96	0.92	0.90	$\underset{\sim}{D}_2$
$\underset{\sim}{A}_3$	0.89	0.86	0.86	0.94	0.86	0.88	$\underset{\sim}{D}_3$
$\underset{\sim}{A}_4$	0.35	0.34	0.32	0.40	0.48	0.40	$\underset{\sim}{D}_4$
$\underset{\sim}{B}$	0.91	0.85	0.88	0.90	0.85	0.90	?

计算得
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.91+(1-0.85)]=0.53,$$
$$\sigma(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=0.52,\quad \sigma(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.52,\quad \sigma(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{B})=0.32.$$
根据择近原则,$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$最贴近,即$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$采取的管理模式最靠近.

3.3.3 多个特性的择近原则

例3.3.4是按小麦的一种特性(百粒重)来对$\underset{\sim}{B}$进行识别的,这显然有局限性.实际上,除百粒重外,小麦的主要特性还有抽穗期、株高、有效穗数、主穗粒数等,它们都可以看成是模糊集.

定义3.3.3 设论域U上有两个模糊向量集合族
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n),\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}=(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\cdots,\underset{\sim}{B}_n),$$
则$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$与$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$的贴近度定义为
$$\sigma(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}},\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})=\bigwedge_{i=1}^{n}\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{B}_i).$$

由于实际问题的需要,为了解决两个模糊向量集合族的贴近程度问题,人们创造了多种贴近度.现列举如下.

设论域U上有两个模糊向量集合族
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n),\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}=(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\cdots,\underset{\sim}{B}_n),$$
则$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$与$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$的贴近程度也可定义为:

1° $\sigma(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}},\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})=\bigvee_{i=1}^{n}\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{B}_i)$;

2° $\sigma(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}},\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})=\sum_{i=1}^{n}a_i\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{B}_i)$,其中$a_i\in[0,1]$,且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$(又称加权贴近度);

3° $\sigma(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}},\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})=\bigvee_{i=1}^{n}[a_i\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{B}_i)]$,其中$a_i\in[0,1]$,且$\bigvee_{i=1}^{n}a_i=1$;

4° $\sigma(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}},\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})=\bigvee_{i=1}^{n}[a_i\wedge\sigma(\underset{\sim}{A}_i,\underset{\sim}{B}_i)]$,其中$a_i\in[0,1]$,且$\bigvee_{i=1}^{n}a_i=1$.

读者可以根据实际需要,应用不同的贴近度.如在例3.3.5中,就应用了“加权

贴近度".

多个特性的择近原则:设论域U上有n个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n$,构成标准模型库$\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n\}$.每个模型$\underset{\sim}{A}_i$由$m$个特性来刻画,即

$$\underset{\sim}{A}_i=(\underset{\sim}{A}_{i1},\underset{\sim}{A}_{i2},\cdots,\underset{\sim}{A}_{im})\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

待识别对象$\underset{\sim}{B}=(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\cdots,\underset{\sim}{B}_m)$.

先求两个模糊向量集合族的贴近度的最小值,即

$$s_i=\bigwedge_{j=1}^{m}\sigma(\underset{\sim}{A}_{ij},\underset{\sim}{B}_j)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

若有$i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$s_{i_0}=\bigvee_{i=1}^{n}s_i,$$

则认为$\underset{\sim}{B}$隶属于$\underset{\sim}{A}_{i_0}$.

3.3.4 贴近度的改进

前面曾经指出过,当$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$都有完全属于自己和完全不属于自己的元素时,格贴近度$M(x)=\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$比较客观地反映了$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的贴近程度,但是格贴近度仍有不足之处.格贴近度的性质2°表明

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=\frac{1}{2}[\overline{\underset{\sim}{A}}+(1-\underline{\underset{\sim}{A}})].$$

一般$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})\neq1$;仅当$\overline{\underset{\sim}{A}}=1,\underline{\underset{\sim}{A}}=0$时,才能保证$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1$.又如图3.4所示,两个正态模糊集$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$有很大差异:$a_1=a_2=a,\sigma_1\neq\sigma_2$,但它们的格贴近度$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1$.

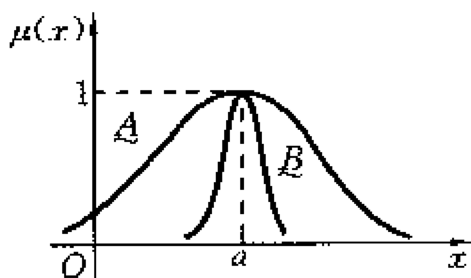


图3.4

这些都表明,格贴近度是一定条件下的产物,难免具有局限性,有时还不能如实反映实际情况,于是,人们试图改进它.这就是下面要介绍的贴近度的公理化定义.

定义3.3.4 设$\mathscr{T}(U)$为论域U的模糊幂集,若映射

$$\sigma:\mathscr{T}(U)\times\mathscr{T}(U)\to[0,1],$$
$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\mapsto\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\in[0,1],$$

满足:

1° $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1,\forall A\in\mathscr{T}(U)$,

2° $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},A),\forall \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathscr{T}(U)$,

3° $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\subseteq\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$,

则称$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度.

显然,公理化定义显得自然、合理、直观,避免了格贴近度的不足之处,它具有理论价值.但是公理化定义并未提供一个计算贴近度的方法,因此不便于操作.

于是,人们一方面尽管觉得格贴近度有缺陷,但还是乐意采用易于计算的格贴近度来解决一些实际问题;另一方面,在实际工作中又给出了许多具体定义.

下面介绍一些实用的具体定义.

设论域U为有限域,即

$$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

1° $$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]},\tag{3.7}$$

2° $$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}\frac{2\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)+\underset{\sim}{B}(x_k)]},\tag{3.8}$$

3° 距离贴近度

$$\sigma_3(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|,\tag{3.9}$$

4° $$\sigma_4(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}1-\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|^2\Big]^{\frac{1}{2}},\tag{3.10}$$

设论域U为实数域**R**,则有

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)]\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}[\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)]\mathrm{d}x},\tag{3.11}$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}\frac{2\int_{-\infty}^{+\infty}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)]\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}\underset{\sim}{A}(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\underset{\sim}{B}(x)\mathrm{d}x},\tag{3.12}$$

$$\sigma_3(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}1-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)|\mathrm{d}x,$$

$$U=[\alpha,\beta]\quad(\text{区间}).\tag{3.13}$$

下面将进一步推导当论域为实数域**R**时的一个很实用的正态模糊集贴近度公式.

设两个正态模糊集$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$(图3.1)为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2},\quad \underset{\sim}{B}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2},$$

由例3.3.2知,两曲线交点的横坐标

$$x^* = \frac{\sigma_2 a_1 + \sigma_1 a_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad 且\ a_1 < x^* < a_2,$$

则由式(3.11)、(3.12),相应得

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{\int_{-\infty}^{x^*} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx + \int_{x^*}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx}{\int_{-\infty}^{x^*} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx + \int_{x^*}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx}, \tag{3.14}$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 2 \times \frac{\int_{-\infty}^{x^*} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx + \int_{x^*}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx}. \tag{3.15}$$

为了计算方便,令$t=\frac{x-a_1}{\sigma_1}$,$dx=\sigma_1 dt$,有

$$\int_{-\infty}^{x^*} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx = \sigma_1\int_{-\infty}^{t^*} e^{-t^2}dt,$$

$$\int_{x^*}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx = \sigma_1\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx = \sigma_1\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt;$$

类似地,令$t=\frac{a_2-x}{\sigma_2}$,有

$$\int_{-\infty}^{x^*} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx = \sigma_2\int_{-\infty}^{t^*} e^{-t^2}dt,$$

$$\int_{x^*}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx = \sigma_2\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx = \sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

将上式代入式(3.14)、(3.15),得

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt}{\int_{-\infty}^{t^*} e^{-t^2}dt}, \tag{3.16}$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 2 \times \frac{\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt, \tag{3.17}$$

其中$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$,并记$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$,因此

$$\int_{t^*}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_{t^*}^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}d(\sqrt{2}t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}t^*}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \sqrt{\pi}\int_{\sqrt{2}t^*}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\pi}\left[1-\int_{-\infty}^{\sqrt{2}t^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$= \sqrt{\pi}[1-\Phi(\sqrt{2}t^*)].$$

类似地 $$\int_{-\infty}^{t^*}e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\sqrt{2}t^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2}t^*).$$

对于上述$t^* = \dfrac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2} > 0$,若 $a_1 > a_2$,可取 $\sqrt{2}t^* = \dfrac{\sqrt{2}(a_1-a_2)}{\sigma_1+\sigma_2}$,代入式(3.16)、(3.17),得

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{2}|a_2-a_1|}{\sigma_1+\sigma_2}\right)}{\Phi\left(\dfrac{\sqrt{2}|a_2-a_1|}{\sigma_1+\sigma_2}\right)}, \tag{3.18}$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 2\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}|a_2-a_1|}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\right]. \tag{3.19}$$

例 3.3.6 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,且

$$\underset{\sim}{A}_1 = \frac{0.2}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}, \quad \underset{\sim}{A}_2 = \frac{0.2}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.1}{x_4},$$

$$\underset{\sim}{A}_3 = \frac{0.2}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}, \quad \underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}.$$

(1) 试用格贴近度判别$\underset{\sim}{B}$与哪个$\underset{\sim}{A}_i$最贴近;

(2) 试用贴近度

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k) \wedge \underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k) \vee \underset{\sim}{B}(x_k)]}$$

判别$\underset{\sim}{B}$与哪个$\underset{\sim}{A}_i$最贴近;

(3) 试用贴近度

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{2\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k) \wedge \underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_k) + \sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{B}(x_k)}$$

判别$\underset{\sim}{B}$与哪个$\underset{\sim}{A}_i$最贴近.

解 (1) 用格贴近度

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})],$$

得 $\sigma_0(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}_1\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}_1\odot\underset{\sim}{B})]=\frac{1}{2}[0.5+(1-0.1)]=0.7,$

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=0.6,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.65,$$

根据择近原则判别，$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$最贴近.

(2) 用贴近度

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]},$$

得 $$\sigma_1(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{4}[\underset{\sim}{A}_1(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{4}[\underset{\sim}{A}_1(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]}=\frac{0.2+0.3+0.5}{0.2+0.4+0.5+0.1}=0.83,$$

$$\sigma_1(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=\frac{0.8}{2.2}=0.36,\quad \sigma_1(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=\frac{0.9}{1.1}=0.82.$$

根据择近原则判别，$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$最贴近.

(3) 用贴近度

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{2\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_k)+\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{B}(x_k)},$$

得 $$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_1,B)=\frac{2\sum_{k=1}^{4}[\underset{\sim}{A}_1(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{4}\underset{\sim}{A}_1(x_k)+\sum_{k=1}^{4}\underset{\sim}{B}(x_k)}$$

$$=\frac{2\times(0.2+0.3+0.5)}{(0.2+0.4+0.5+0.1)+(0.2+0.3+0.5)}=0.91,$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=\frac{1.6}{1.1+1}=0.76,\quad \sigma_2(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=\frac{1.8}{1+1}=0.90,$$

根据择近原则判别，$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$最贴近.

本例说明，应用三种不同的贴近度，其判别结论是一致的，因此，认为$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_1$最贴近的把握要大些.

例3.3.7 在幼稻分化进程的评定过程中，遇到叶龄余数$a=2.7$，$\sigma=0.1$的水稻群体$\underset{\sim}{B}$，即

$$\underset{\sim}{B}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

已知该群体分化期有一次枝硬化期$\underset{\sim}{A}_1$与二次枝硬化期$\underset{\sim}{A}_2$两种，它们的参数值如表3.3所示.

表 3.3

指标	一次枝硬化期参数		二次枝硬化期参数	
	a_1	σ_1	a_2	σ_2
叶龄余数	2.95	0.3	2.4	0.3

(1) 试用格贴近度和择近原则确定该群体所属分化期；

(2) 试用贴近度

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 2\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}\,|a_2-a_1|}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\right]$$

确定该群体所属分化期. 其中

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

a_i,σ_i $(i=1,2)$分别为$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$的均值及标准差.

解 利用式(3.5)与式(3.19)计算，得

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{2.95-2.7}{0.3+0.1}\right)^2}+1\right]\approx 0.8383,$$

$$\sqrt{2}\,t^* = \frac{\sqrt{2}\,|2.95-2.7|}{0.3+0.1}\approx 0.88,$$

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=2[1-\Phi(0.88)]=2[1-0.8106]=0.3788.$$

其他的类似计算的结果列在表 3.4 中.

表 3.4

	一次枝硬化期$\underset{\sim}{A}_1$	二次枝硬化期$\underset{\sim}{A}_2$	待识别$\underset{\sim}{B}$
a	2.95	2.4	2.7
σ	0.3	0.3	0.1
$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{a_k-a}{\sigma_k+\sigma}\right)^2}+1\right]$	0.8383	0.7849	
$\sqrt{2}\,t^*=\frac{\sqrt{2}\,\|a_k-a\|}{\sigma_k+\sigma}$	0.88	1.06	
$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=2[1-\Phi(\sqrt{2}\,t^*)]$	0.3788	0.2892	

根据择近原则，待识别的水稻群体$\underset{\sim}{B}$应隶属于一枝硬化期$\underset{\sim}{A}_1$.

上述这些贴近度，不仅实用，而且均满足公理化定义中的三个条件.

例 3.3.8 设距离贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\overset{\text{def}}{=\!=}1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|,$$

证明：(1) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})=1$；　　(2) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A})$；

(3) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\Rightarrow\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$.

证 题(1)和题(2)是显然的,只证题(3).

因为$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$,所以

$$\underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(x)\leqslant\underset{\sim}{C}(x),$$

$$|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{C}(x)|\geqslant|\underset{\sim}{A}(x)-\underset{\sim}{B}(x)|,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{C}(x_k)|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|,$$

$$1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{C}(x_k)|\leqslant1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|,$$

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}).$$

同理可证
$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}),$$

故
$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}).$$

最后介绍一下模糊模型识别与模糊聚类分析的区别.

在讲完模糊模型识别以后,再回到模糊聚类分析,读者可能会产生一种错觉,以为模糊模型识别与模糊聚类分析都是分类问题,没有什么差别.实际上,二者是有差别的.

模糊模型识别所讨论的问题是:已知若干模型,或者已知一个标准模型库(优良的作物品种、印刷体的阿拉伯数字等都是标准模型库),有一个待识别的对象,要求我们去识别对象应属于哪一个模型,即哪一类.

模糊聚类分析所讨论的对象是一大堆样本,事先没有任何模型可以借鉴,要求我们根据它们的特性进行适当的分类.因此,可以这样说,模糊模型识别是一种有模型的分类问题,而模糊聚类分析是一种无模型的分类问题.

但是,在实际应用时往往是先进行模糊聚类(3.4节即建立若干标准模型),然后将待识别的对象进行模糊识别.

由上可见,由模糊聚类分析进行判别、预测预报的过程,实际上是模糊聚类与模糊识别综合运用的过程.这里的模型是在聚类过程中得到的,恰恰为模糊识别提供了标准模型库.因此,从某种意义上说,模糊聚类分析与模糊模型识别又是有联系的.

3.4 模糊模型识别的应用

模糊识别的应用是多方面的,限于篇幅,这里仅举几例介绍模糊识别在科学技术方面的应用.

例3.4.1 茶叶的模糊识别 上海市技术监督局1998年公布了“西湖龙井茶

叶感官分级要求"(《新民晚报》1998 年5 月21 日第21 版),反映茶叶质量(外形与内质)的指标共7 个:形状,色泽,净度;汤色,香气,滋味,叶底. 这些指标都是模糊的. 比如特二级的要求是,形状:外形扁平光滑,匀整挺直;色泽:翠绿光润;净度:匀净;汤色:杏绿明亮;香气:高嫩持久;滋味:鲜醇;叶底:细嫩成朵,嫩绿明亮.

设论域$U=\{$茶叶$\}$,由茶叶分成的特一级、特二级、特三级、一级、二级、三级、四级等7 个等级,构成了U 上的标准模型库$\{\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{A}_5, \underset{\sim}{A}_6, \underset{\sim}{A}_7\}$. 描述茶叶质量的指标共7 个,数据由表 3.5 给出. 待识别的茶叶

$$\underset{\sim}{B}=(0.8,\ 0.8,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.7,\ 0.7,\ 0.6).$$

表 3.5

质量指标		样品							待识别
		$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$	$\underset{\sim}{A}_7$	$\underset{\sim}{B}$
外形	形状	1	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.8
	色泽	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4	0.3	0.2	0.8
	净度	0.9	0.9	0.9	0.7	0.5	0.5	0.5	0.7
内质	汤色	0.9	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0.8
	香气	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.3	0.7
	滋味	1	0.9	0.7	0.7	0.6	0.5	0.3	0.7
	叶底	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.4	0.2	0.6

先用格贴近度

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})]$$

计算,得

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=0.45,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=0.5,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.55,$$
$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{B})=0.55,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{B})=0.5,\quad \sigma_0(\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{B})=0.45,$$
$$\sigma_0(\underset{\sim}{A}_7,\underset{\sim}{B})=0.45.$$

按择近原则,茶叶$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_3$ 或$\underset{\sim}{A}_4$ 最贴近. 这样一来,实际上并未识别出来.

再用改进的贴近度,代人公式

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{2\sum_{k=1}^{7}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{7}[\underset{\sim}{A}(x_k)+\underset{\sim}{B}(x_k)]}$$

计算,得

$$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=0.8718,\quad \sigma_2(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=0.9107,\quad \sigma_2(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.9524,$$
$$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{B})=0.9263,\quad \sigma_2(\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{B})=0.8140,\quad \sigma_2(\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{B})=0.7407,$$

$\sigma_2(\underset{\sim}{A}_7,\underset{\sim}{B})=0.5634.$

代人公式
$$\sigma_3(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|$$
计算,得

$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B})=0.7857$,　$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{B})=0.8571$,　$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{B})=0.9286$,

$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{B})=0.9000$,　$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{B})=0.7714$,　$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{B})=0.7000$,

$\sigma_3(\underset{\sim}{A}_7,\underset{\sim}{B})=0.5571.$

由此可见,改进的两个不同的贴近度公式计算结果都是$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}_3$最贴近,故把茶叶归到$\underset{\sim}{A}_3$(特三级)的把握是比较大的.

例 3.4.2　小麦亲本的模糊识别[11]　在小麦杂交过程中,亲本的选择是关键措施之一,而亲本的划分是模糊的. 以每株小麦为讨论对象x,其全体构成论域U. 现有5种小麦亲本类型,实际上是U的5个模糊子集$\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$,分别表示早熟型、矮秆型、大粒型、高肥丰产型、中肥丰产型. 由它们构成上的标准模型库$\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{A}_5\}$. 每株小麦$x$具有5种性状特征:$x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$,分别表示抽穗期、株高、有效穗数、主穗粒数、百粒重.

对于每一个品种(标准模型),小麦的每一个特性都是U上的一个模糊子集. 令第i种亲本的第j种性状是模糊集$\underset{\sim}{A}_{ij}$(图3.5),其隶属函数$\mu(x)$为

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j)=\begin{cases}0, & x_j\leqslant a_{ij}-\sigma_{ij},\\ 1-\left(\dfrac{x_j-a_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2, & a_{ij}-\sigma_{ij}<x_j<a_{ij},\\ 1, & a_{ij}\leqslant x_j\leqslant b_{ij},\\ 1-\left(\dfrac{x_j-b_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2, & b_{ij}<x_j<b_{ij}+\sigma_{ij},\\ 0, & x_j\geqslant b_{ij}+\sigma_{ij}.\end{cases}$$

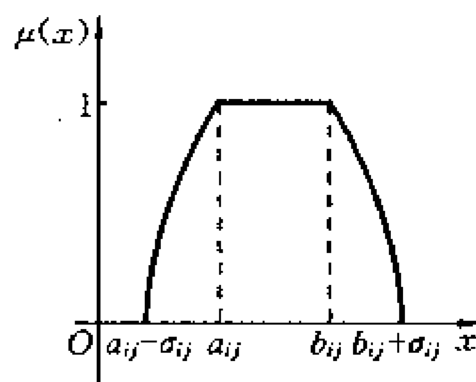


图 3.5

其中参数$a_{ij},b_{ij},\sigma_{ij}$由统计方法得到,如表3.6所示.

表 3.6

亲本类型		性状特征				
		抽穗期	株高	有效穗数	主穗粒数	百粒重
早熟型 ($\underset{\sim}{A}_1$)	a_{1j}	5.3	67.1	9.1	40.2	3.0
	b_{1j}	6.7	87.7	12.2	55.0	4.4
	σ_{1j}	1.1	50.0	18.1	92.0	0.3
矮秆型 ($\underset{\sim}{A}_2$)	a_{2j}	5.5	67.0	8.3	37.5	2.4
	b_{2j}	9.6	70.0	18.2	52.5	3.4
	σ_{2j}	1.0	72.4	10.8	80.7	0.3

续表

亲本类型		性状特征				
		抽穗期	株高	有效穗数	主穗粒数	百粒重
大粒型 ($\underset{\sim}{A}_3$)	a_{3j}	5.8	67.9	9.4	44.2	4.0
	b_{3j}	11.9	90.9	13.2	54.5	6.0
	σ_{3j}	1.2	52.2	15.6	121.2	0.3
高肥丰产型 ($\underset{\sim}{A}_4$)	a_{4j}	5.2	67.9	9.8	41.2	3.6
	b_{4j}	11.3	81.2	13.2	51.0	4.2
	σ_{4j}	0.9	35.9	11.3	113.3	0.3
中肥丰产型 ($\underset{\sim}{A}_5$)	a_{5j}	5.1	76.5	7.2	37.6	3.3
	b_{5j}	8.9	84.6	13.2	48.3	4.0
	σ_{5j}	1.2	57.5	5.8	93.9	0.2

由此可见，小麦每一种亲本类型$\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$是一个模糊向量集合族，即$\underset{\sim}{A}_i=(\underset{\sim}{A}_{i1},\underset{\sim}{A}_{i2},\underset{\sim}{A}_{i3},\underset{\sim}{A}_{i4},\underset{\sim}{A}_{i5})$.

现有一待识别小麦亲本$\boldsymbol{x}=(6.0,67.1,11.3,55.0,2.9)$，试判别它相对属于哪一亲本.

这里涉及一个普通向量$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$对模糊向量集合族$\underset{\sim}{A}_i=(\underset{\sim}{A}_{i1},\underset{\sim}{A}_{i2},\underset{\sim}{A}_{i3},\underset{\sim}{A}_{i4},\underset{\sim}{A}_{i5})$的隶属度. 可定义

$$\underset{\sim}{A}_i(\boldsymbol{x})=\bigwedge_{j=1}^{5}\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j)$$

为$\boldsymbol{x}$对亲本$\underset{\sim}{A}_i$的隶属度，由此计算得到的结果如表3.7所示.

表 3.7

亲本类型	$\underset{\sim}{A}_{i1}(x_1)$	$\underset{\sim}{A}_{i2}(x_2)$	$\underset{\sim}{A}_{i3}(x_3)$	$\underset{\sim}{A}_{i4}(x_4)$	$\underset{\sim}{A}_{i5}(x_5)$	$\underset{\sim}{A}_i(x)$
$\underset{\sim}{A}_1$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.8889	0.8889
$\underset{\sim}{A}_2$	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	1.0000	0.9990
$\underset{\sim}{A}_3$	1.0000	0.9998	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
$\underset{\sim}{A}_4$	1.0000	0.9995	1.0000	0.9988	0.0000	0.0000
$\underset{\sim}{A}_5$	1.0000	0.9733	1.0000	0.9949	0.0000	0.0000

根据最大隶属原则，待识别小麦亲本$\boldsymbol{x}=(6.0,\ 67.1,\ 11.3,\ 55.0,\ 2.9)$相对属于$\underset{\sim}{A}_2$(矮秆型).

如果现有一待识别小麦亲本$\underset{\sim}{B}=(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{B}_3,\underset{\sim}{B}_4,\underset{\sim}{B}_5)$，其中$\underset{\sim}{B}_j$是亲本关于第$j$种性状的模糊子集(表3.8)，那么这里涉及两个模糊向量集合族之间的贴近度和多个特性的择近原则.

表 3.8

待识别亲本$\underset{\sim}{B}$		性状特征				
		抽穗期	株高	有效穗数	主穗粒数	百粒重
参数	$a_j(b_j)$	8.5	85.6	6.2	36.2	3.4
	σ_j	1.5	4	1.9	70	0.28

首先选择一种贴近度,例如格贴近度

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})],$$

计算两个模糊子集$\underset{\sim}{A}_{ij}$与$\underset{\sim}{B}_j$的贴近度.

其次是定义两个模糊向量集合族$\boldsymbol{\underset{\sim}{A}}_i$,$\boldsymbol{\underset{\sim}{B}}$之间的贴近度$s_i$. 如果将所有性状特征平等看待,可采用公式

$$s_i=\bigwedge_{j=1}^{5}\sigma(\underset{\sim}{A}_{ij},\underset{\sim}{B}_j).$$

若考虑到5种性状在识别亲本类型中所起的作用不同,可引进加权贴近度,即定义两个模糊向量集合族$\boldsymbol{\underset{\sim}{A}}_i$,$\boldsymbol{\underset{\sim}{B}}$之间的贴近度$s_i$为

$$s_i=\sum_{j=1}^{5}a_j\sigma(\underset{\sim}{A}_{ij},\underset{\sim}{B}_j),$$

其中$a_1+\cdots+a_5=1$,$a_j\in[0,\ 1]$. 如果取权重$\boldsymbol{a}=(0.25,0.05,0.30,0.15,0.25)$,这表明第一看重有效穗数,第二看重抽穗期和百粒重.

然后根据最大隶属原则确定待识别小麦亲本$\boldsymbol{\underset{\sim}{B}}$相对属于哪一亲本,这就是多个特性的择近原则的一种应用.

为了方便计算,重新定义模糊集$\underset{\sim}{A}_{ij}$的隶属函数为对称型的正态模糊分布

$$\underset{\sim}{A}_{ij}(x_j)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x_j-a_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right], & x_j<a_{ij},\\ 1, & a_{ij}\leqslant x_j\leqslant b_{ij},\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x_j-b_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right], & x_j>b_{ij},\end{cases}$$

其中参数a_{ij}, b_{ij},σ_{ij}由统计方法确定,如表3.6所示.

待识别小麦亲本$\boldsymbol{\underset{\sim}{B}}$的第$j$种性状$\underset{\sim}{B}_j$的隶属函数也都定义为对称型的正态模糊分布

$$\underset{\sim}{B}_j(x_j)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)^2\right], & x_j<a_j,\\ 1, & a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x_j-b_j}{\sigma_j}\right)^2\right], & x_j>b_j.\end{cases}$$

仿照例 3.3.2,可得两个模糊子集 A_{ij} 与 B_j 的格贴近度计算公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A}_{ij},\underset{\sim}{B}_j)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left\{1+\exp\left[-\left(\frac{a_{ij}-b_j}{\sigma_{ij}+\sigma_j}\right)^2\right]\right\}, & b_j<a_{ij},\\ 1, & a_{ij}\leqslant b_j \text{ 且 } a_j\leqslant b_{ij},\\ \frac{1}{2}\left\{1+\exp\left[-\left(\frac{b_{ij}-a_j}{\sigma_{ij}+\sigma_j}\right)^2\right]\right\}, & a_j>b_{ij}.\end{cases}$$

代入具体数据计算,结果如表 3.9 所示.

表 3.9

亲本类型	$\sigma(\underset{\sim}{A}_{i1},\underset{\sim}{B}_1)$	$\sigma(\underset{\sim}{A}_{i2},\underset{\sim}{B}_2)$	$\sigma(\underset{\sim}{A}_{i3},\underset{\sim}{B}_3)$	$\sigma(\underset{\sim}{A}_{i4},\underset{\sim}{B}_4)$	$\sigma(\underset{\sim}{A}_{i5},\underset{\sim}{B}_5)$	平等 s_i	加权 s_i
$\underset{\sim}{A}_1$	0.8096	1.0000	0.9896	0.9997	1.0000	0.8096	0.9492
$\underset{\sim}{A}_2$	1.0000	0.9796	0.9865	1.0000	1.0000	0.9796	0.9949
$\underset{\sim}{A}_3$	1.0000	1.0000	0.9836	0.9991	0.6715	0.6715	0.9128
$\underset{\sim}{A}_4$	1.0000	0.9940	0.9642	0.9996	0.9439	0.9439	0.9749
$\underset{\sim}{A}_5$	1.0000	0.9999	0.9916	1.0000	1.0000	0.9916	0.9975

根据择近原则,不管是将所有性状特征平等看待,还是考虑到 5 种性状在识别亲本类型中所起的作用不同进行加权计算,都能得到待识别亲本 $\underset{\sim}{B}$ 属于 $\underset{\sim}{A}_5$(中肥丰产型).

从表3.9 可以看出,如果只考虑某一种特性,则会得到不同的结论. 因此,单纯依靠某一种特性来进行识别是不行的,这也是引进多个特性的择近原则的缘由.

例 3.4.3 未知 DNA 序列的模糊识别 现在再用本章所述方法重新讨论例 2.5.1中未知DNA 序列的识别问题. 先将已知类别的1～20 条DNA 序列中A、T、C、G 的百分率(表 2.8)构成原始数据矩阵,然后采用夹角余弦法建立模糊相似矩阵,再用传递闭包法进行聚类,动态聚类图如图 3.6 所示.

根据动态聚类图3.6,在$\lambda=0.9904$ 的水平上,可将已知类别的20 条DNA 序列划分为 7 类:{1,2,8,6,7},{3,5,9,10},{4},{17},{11,16,12,13,14,18},{19,20},{15}. 此时对应的F 统计量值为61.2994,而$F_{0.05}(6,13)=2.9153$,这说明该分类是合理的. 把这 7 类的中心向量分别记为

$$\underset{\sim}{A}_1=(0.3099,\ 0.1586,\ 0.1442,\ 0.3874),$$
$$\underset{\sim}{A}_2=(0.2234,\ 0.1152,\ 0.2326,\ 0.4289),$$
$$\underset{\sim}{A}_3=(0.4234,\ 0.2883,\ 0.1081,\ 0.1802),$$
$$\underset{\sim}{A}_4=(0.3545,\ 0.2636,\ 0.2455,\ 0.1364),$$
$$\underset{\sim}{A}_5=(0.3151,\ 0.4970,\ 0.0758,\ 0.1121),$$
$$\underset{\sim}{A}_6=(0.2091,\ 0.5636,\ 0.1591,\ 0.0682),$$
$$\underset{\sim}{A}_7=(0.2909,\ 0.6455,\ 0.0000,\ 0.0636).$$

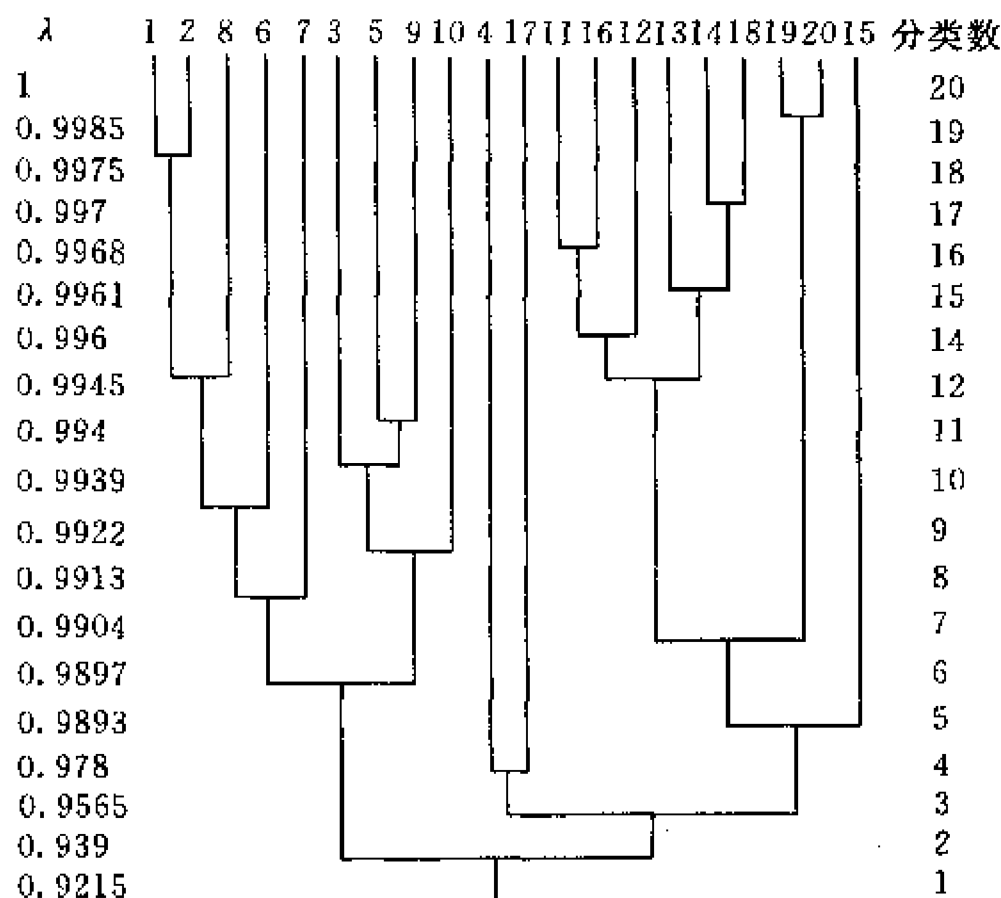


图 3.6

再将 $\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_7$ 作为标准模型库，采用格贴近度

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})],$$

计算待检测DNA 序列与标准模型库中各元素的贴近程度，并运用最大隶属原则对未知类别的DNA 序列进行模糊识别，结果如表 3.10 所示.

表 3.10　未知DNA 序列的模糊识别

No.	未知DNA 序列与标准模型库的格贴近度							所属类别
	$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	$\underset{\sim}{A}_6$	$\underset{\sim}{A}_7$	
21	0.5398	0.4954	0.5541	0.5531	0.5974	0.5974	0.5974	$\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{A}_7$
22	0.5336	0.5144	0.5241	0.5215	0.5241	0.4904	0.5241	$\underset{\sim}{A}_1$
23	0.5981	0.5981	0.4657	0.4953	0.4657	0.4886	0.4657	$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2$
24	0.5087	0.4927	0.5485	0.5362	0.6087	0.6087	0.6087	$\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{A}_7$
25	0.5429	0.5429	0.5095	0.5011	0.5095	0.4952	0.5095	$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2$
26	0.5044	0.4980	0.5521	0.5397	0.6009	0.6009	0.6009	$\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{A}_7$
27	0.5673	0.5529	0.5144	0.4926	0.5144	0.5144	0.5144	$\underset{\sim}{A}_1$
28	0.5555	0.4954	0.5715	0.5549	0.6495	0.6453	0.6495	$\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_7$
29	0.5997	0.6204	0.4851	0.4861	0.4851	0.4895	0.4851	$\underset{\sim}{A}_2$
30	0.5233	0.4948	0.5373	0.5373	0.5373	0.5186	0.5373	$\underset{\sim}{A}_3,\underset{\sim}{A}_4,\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_7$
31	0.5313	0.4954	0.5548	0.5202	0.5892	0.5892	0.5892	$\underset{\sim}{A}_5,\underset{\sim}{A}_6,\underset{\sim}{A}_7$
32	0.5183	0.5214	0.5294	0.5091	0.5504	0.5606	0.5504	$\underset{\sim}{A}_6$

续表

No.	未知DNA序列与标准模型库的格贴近度							所属类别
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
33	0.5405	0.4954	0.5495	0.5315	0.5720	0.5720	0.5720	A_5, A_6, A_7
34	0.5980	0.5980	0.5000	0.4949	0.5000	0.4869	0.5000	A_1, A_2
35	0.5679	0.5679	0.5145	0.4986	0.5145	0.4978	0.5145	A_1, A_2
36	0.5238	0.5238	0.4857	0.4942	0.4857	0.4905	0.4857	A_1, A_2
37	0.5631	0.5631	0.4806	0.4966	0.4806	0.4978	0.4806	A_1, A_2
38	0.5256	0.4994	0.5587	0.5464	0.6325	0.6325	0.6325	A_5, A_6, A_7
39	0.5189	0.4984	0.5331	0.5331	0.5331	0.5142	0.5331	A_3, A_4, A_5, A_7
40	0.5000	0.4875	0.5541	0.5456	0.6293	0.6293	0.6293	A_5, A_6, A_7

由标准模型库$A_1, A_2, \cdots, A_7$的定义，自然将属于A_1, A_2, A_3的DNA序列归为A类，属于A_4, A_5, A_6, A_7的DNA序列归为B类，但从动态聚类图3.6上看，属于A_3或A_4的DNA序列最具有模糊性，所以我们将属于A_3或A_4的DNA序列归为非A非B类. 由此得：

属于A类的序号为22，23，25，27，29，34，35，36，37；

属于B类的序号为21，24，26，28，31，32，33，38，40；

既不属于A类又不属于B类的序号为30，39.

这一结果与例2.5.1稍有不同，除了序号为30,32,36,39的DNA序列外，其他的完全相同. 对于序号为30,32,36,39的DNA序列，可进一步考察其他的生物学指标确定其归属问题.

例 3.4.4　蠓的分类*　两种蠓Af和Apf已由生物学家克罗纳(W. L. Grogna)和威尔斯(W. W. Wirth)于1981年根据它们的触角长和翼长加以区分，图3.7给出了9只Af和6只Apf蠓的触角长和翼长数据，其中"●"表示Apf，"○"表示Af. 根据触角长和翼长来识别一个标本是Af还是Apf是重要的.

给定一只Af族或Apf族的蠓，如何正确地区分它属于哪一族？将你的方法用于触角长和翼长分别为(1.24，1.80)，(1.28，1.84)，(1.40，2.04)三个标本. 假设Af是传粉益虫，Apf是某种疾病的载体，是否应修改你的分类方法？若需修改，为什么？

根据图建立原始数据矩阵$X=(x_{ij})_{15\times 2}$(表3.11)，用绝对值减数法

$$r_{ij}=1-0.5814\sum_{k=1}^{2}|x_{ik}-x_{jk}|,$$

建立的模糊相似矩阵，然后用传递闭包法进行聚类，动态聚类图如图3.8所示.

* 本题选自1989年美国大学生数学建模竞赛A题.

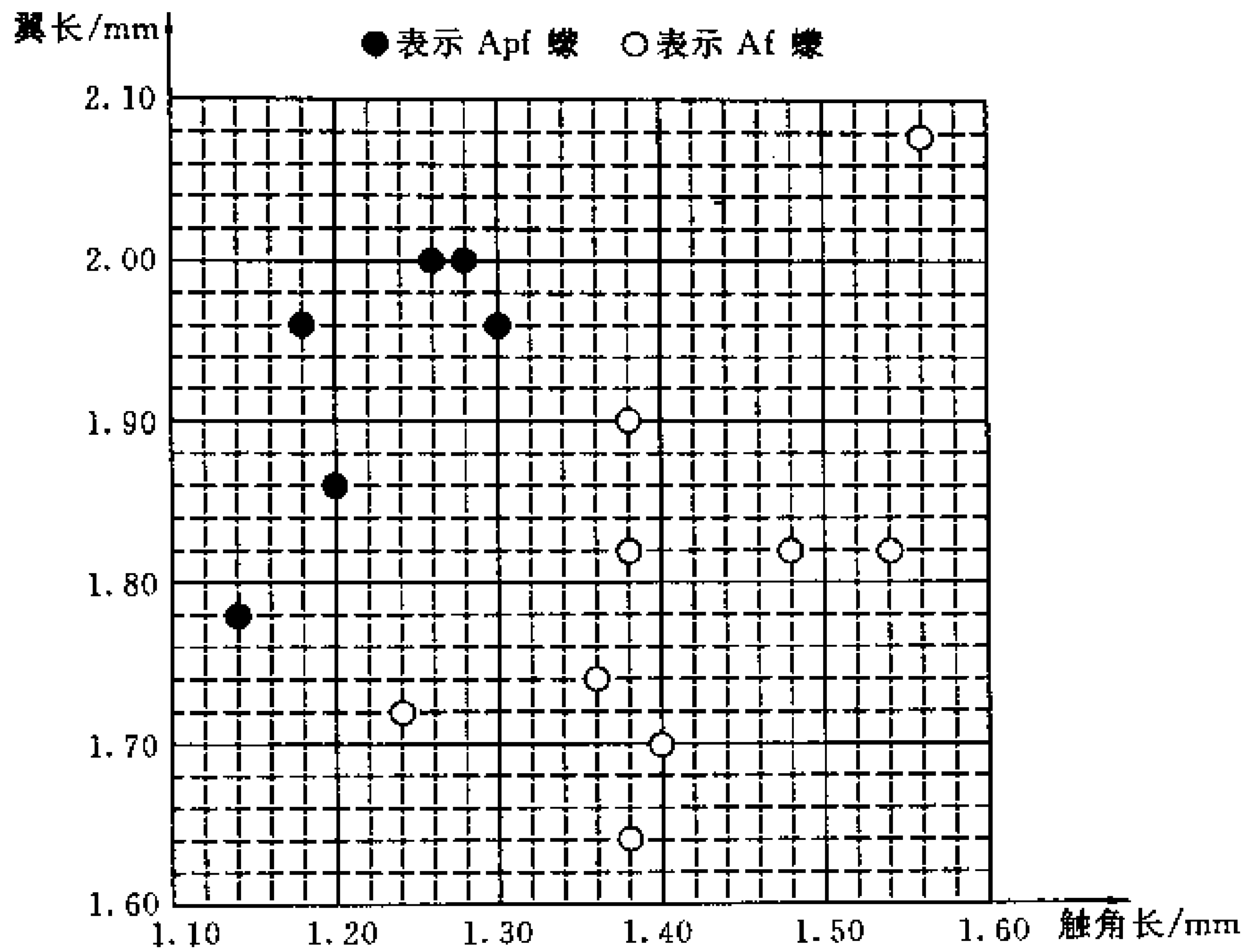


图 3.7

表 3.11

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
触角长	1.24	1.36	1.38	1.38	1.38	1.40	1.48	1.54	1.56	1.14	1.18	1.20	1.26	1.28	1.30
翼长	1.72	1.74	1.64	1.82	1.90	1.70	1.82	1.82	2.08	1.78	1.96	1.86	2.00	2.00	1.96

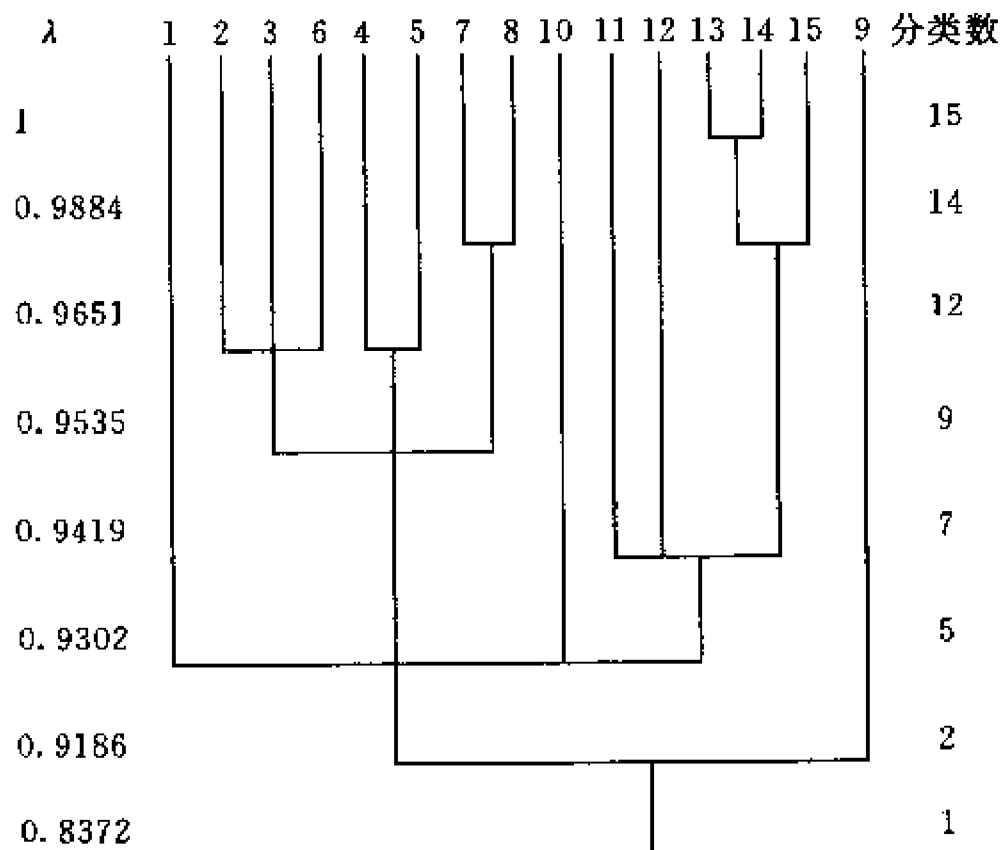


图 3.8

当$\lambda=0.9302$时,分为5类:

$\{1\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$, $\{11, 12, 13, 14, 15\}$,

5类的中心向量分别为

(1.240, 1.720), (1.417, 1.777), (1.560, 2.080),

(1.140, 1.780), (1.244, 1.956).

用平移·极差变换$x'=\dfrac{x-1.14}{2.08-1.14}$将它们分别变为

$\underset{\sim}{A}_1=(0.1064, 0.6170)$,　$\underset{\sim}{A}_2=(0.2947, 0.6777)$,　$\underset{\sim}{A}_3=(0.4468, 1.0000)$,

$\underset{\sim}{A}_4=(0.0000, 0.6809)$,　$\underset{\sim}{A}_5=(0.1106, 0.8681)$,

将3只待识别的蠓用上述变换分别变为

$\underset{\sim}{B}_1=(0.1064, 0.7021)$,　$\underset{\sim}{B}_2=(0.1489, 0.7447)$,　$\underset{\sim}{B}_3=(0.2766, 0.9574)$.

分别采用距离贴近度

$$\sigma_3(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|$$

和格贴近度

$$\sigma_0(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}]$$

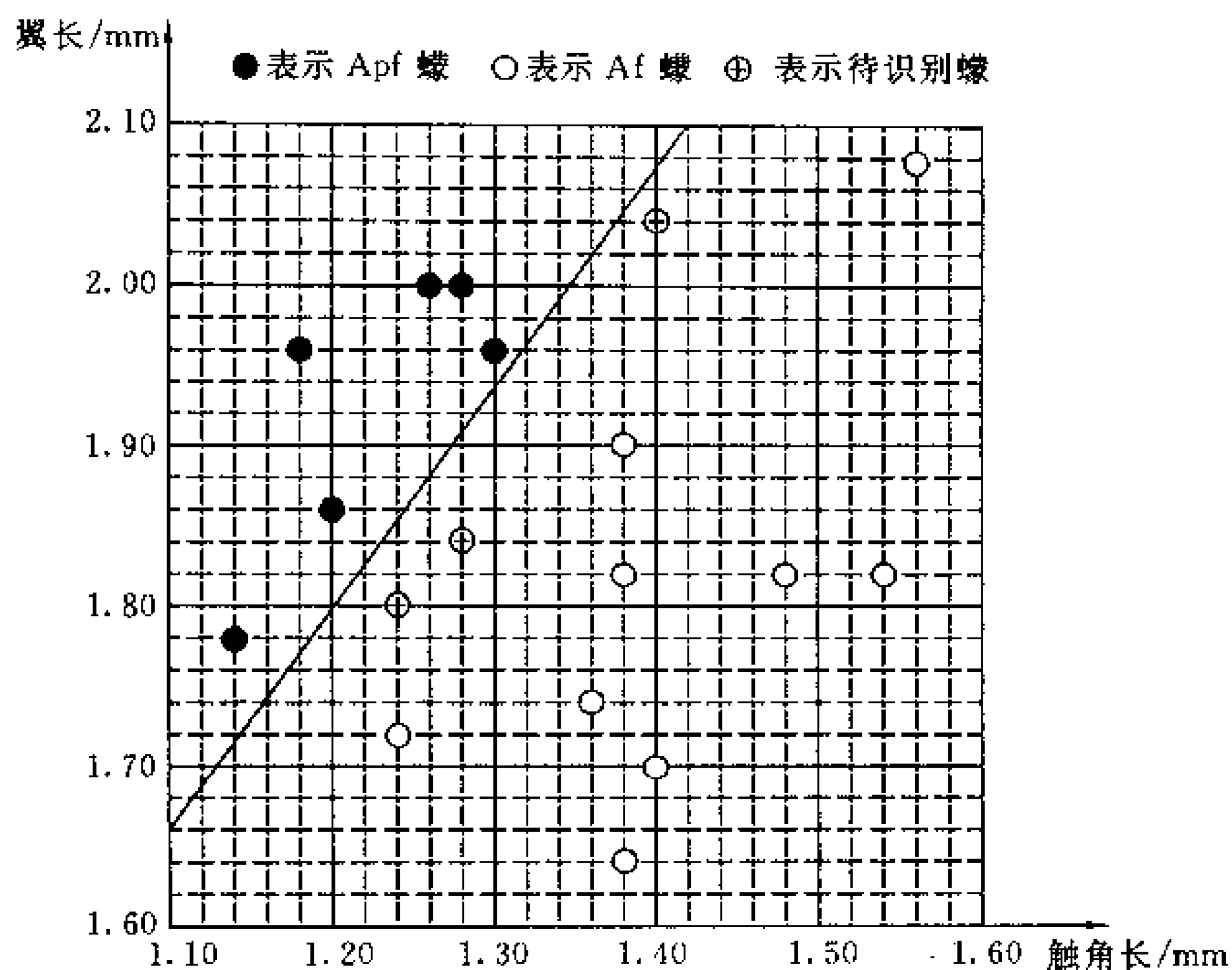
计算结果如表3.12所示.

表3.12　蠓的识别

		Af			Apf		所属类型
		$\underset{\sim}{A}_1$	$\underset{\sim}{A}_2$	$\underset{\sim}{A}_3$	$\underset{\sim}{A}_4$	$\underset{\sim}{A}_5$	
距离贴近度识别	$\underset{\sim}{B}_1$	0.9787	0.9468	0.8404	0.9681	0.9574	Af
	$\underset{\sim}{B}_2$	0.9574	0.9468	0.8617	0.9468	0.9596	Apf
	$\underset{\sim}{B}_3$	0.8723	0.9255	0.9468	0.8617	0.9362	Af
格贴近度识别	$\underset{\sim}{B}_1$	0.7553	0.6915	0.6277	0.7872	0.7957	Apf
	$\underset{\sim}{B}_2$	0.7340	0.6915	0.6489	0.7660	0.7979	Apf
	$\underset{\sim}{B}_3$	0.6702	0.6915	0.7553	0.7021	0.7957	Apf

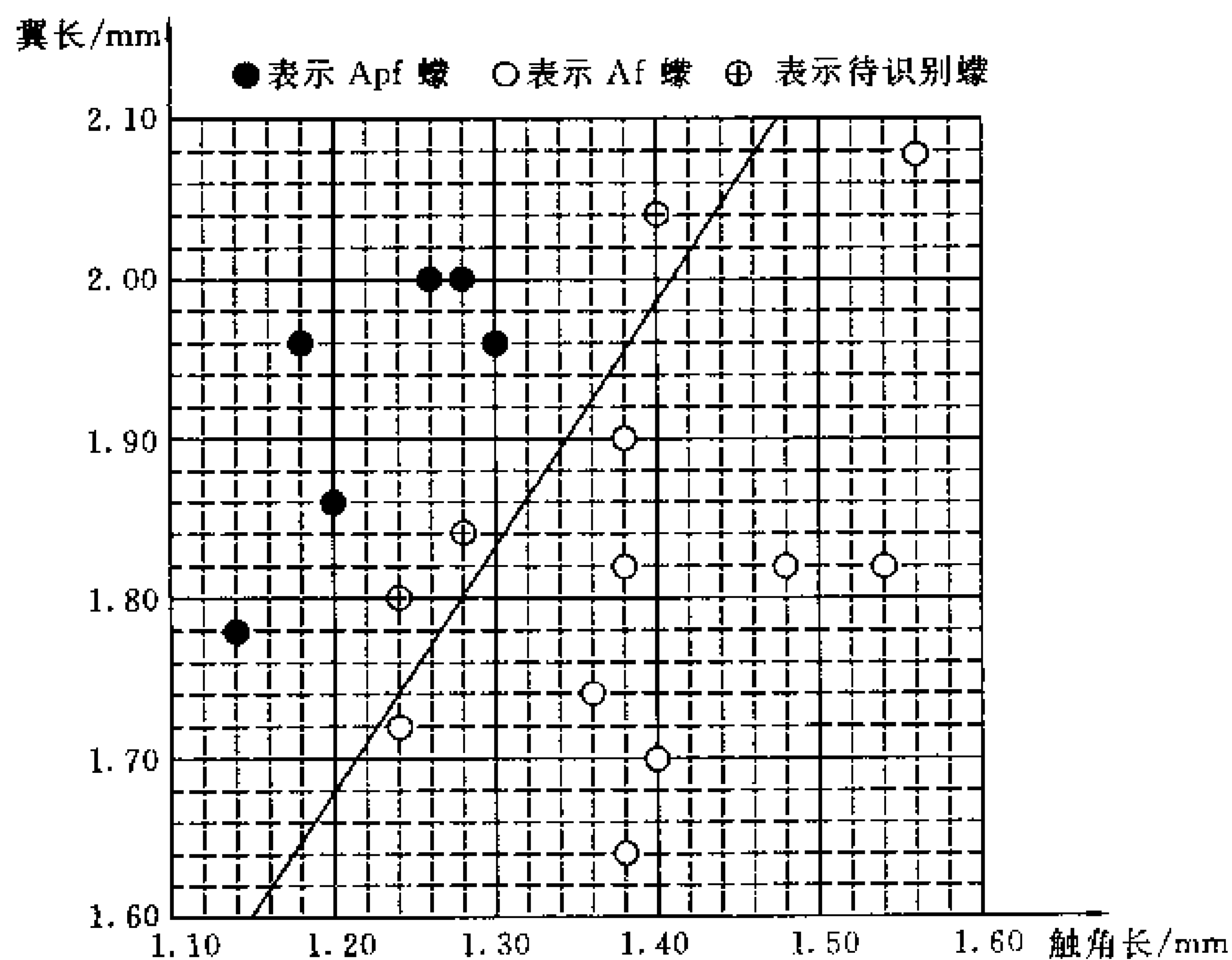
上述两种方法得到两种不同的结果,原因是待识别的3只蠓最具有模糊性(图3.9).

如果Af是传粉益虫,Apf是某种疾病的载体,应修改你的分类方法. 修改分类方法不仅与原来的15个标本有关,而且与是保护传粉益虫Af还是消灭传病害虫Apf重要性有关. 如果保护传粉益虫Af重要,将图3.9中的斜线尽量靠近Apf;反之,如果消灭传病害虫Apf重要,将图3.10中的斜线尽量靠近Af.



翼长/mm
●表示 Apf 蠓 ○表示 Af 蠓 ⊕ 表示待识别蠓
2.10
2.00
1.90
1.80
1.70
1.60
1.10
1.20
1.30
1.40
1.50
1.60
触角长/mm

图 3.9



翼长/mm
●表示 Apf 蠓 ○表示 Af 蠓 ⊕ 表示待识别蠓
2.10
2.00
1.90
1.80
1.70
1.60
1.10
1.20
1.30
1.40
1.50
1.60
触角长/mm

图 3.10

习 题 3

1. 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为模糊向量,试证:

(1) $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}\leqslant\bar{a}\wedge\bar{b}$;　　　　(2) $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{a}^c\geqslant\frac{1}{2}$.

2. 模糊识别　设$\underset{\sim}{A}_1$="不热",$\underset{\sim}{A}_2$="不冷",$U=[0,\infty]$,x 表示温度(单位:℃),$\underset{\sim}{A}_1$和$\underset{\sim}{A}_2$相应的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_1(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 15,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-15}{10}\right)^4\right]^{-1}, & x>15,\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 10,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-10}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x>10,\end{cases}$$

$\underset{\sim}{A}_3=\underset{\sim}{A}_1\cap\underset{\sim}{A}_2$ 表示"暖和".试问:$x=20$ ℃时气温属哪种状态?

3. 通货膨胀问题　设论域

$$R^+=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant 0\},$$

它表示价格指数的集合.将通货状态分成5个类型:$\underset{\sim}{A}_1$="通货稳定",$\underset{\sim}{A}_2$="轻度通货膨胀",$\underset{\sim}{A}_3$="中度通货膨胀",$\underset{\sim}{A}_4$="重度通货膨胀",$\underset{\sim}{A}_5$="恶性通货膨胀".对$x\in R^+$,x 表示物价上涨$x\%$.$\underset{\sim}{A}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<5,\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-5}{3}\right)^2\right], & x\geqslant 5;\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-10}{5}\right)^2\right],\quad x\in R^+;$$

$$\underset{\sim}{A}_3(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-20}{7}\right)^2\right],\quad x\in R^+;$$

$$\underset{\sim}{A}_4(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-30}{7}\right)^2\right],\quad x\in R^+;$$

$$\underset{\sim}{A}_5(x)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x-50}{15}\right)^2\right], & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 1, & x>50.\end{cases}$$

试按最大隶属原则判断:$x_1=6$,$x_2=21.7$ 相对属于通货膨胀的哪一种类型?

4. 体温识别　某11家医院关于正常体温及低热统计如表3.13所示.试用模糊统计方法确定37.1 ℃体温分别对"正常体温"与"低热"的隶属度,并按最大隶属原则判断37.1 ℃体温相对属于哪一种类型.

表 3.13

医院	正常体温/℃	低热/℃
1	36.2～37.2	37.3～38
2	36.0～37.0	37.0～38
3	36.0～37.0	37.0～38
4	36.2～37.2	37.2～38
5	36.0～37.0	37.0～38
6	36.0～37.0	37.0～38
7	36.4～37.2	37.4～38
8	36.2～37.2	37.2～38
9	36.2～37.2	37.5～38
10	36.2～37.2	37.5～38
11	36.2～37.2	37.1～38

5. 设论域U上的模糊集$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$,试证:

(1) $(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^C=\underset{\sim}{A}^C\circ\underset{\sim}{B}^C$;　　(2) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Rightarrow\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\overline{\underset{\sim}{A}}$;

(3) $\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\geqslant\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$;　　(4) $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}^C\leqslant 1/2$.

6. 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$上的标准模型库为

$\underset{\sim}{A}_1=(1,0.8,0.5,0.4,0,0.1)$,　$\underset{\sim}{A}_2=(0.5,0.1,0.8,1,0.6,0)$,

$\underset{\sim}{A}_3=(0,1,0.2,0.7,0.5,0.8)$,　$\underset{\sim}{A}_4=(0.4,0,1,0.9,0.6,0.5)$,

$\underset{\sim}{A}_5=(0.8,0,2,0,0.5,1,0.7)$,　$\underset{\sim}{A}_6=(0.5,0,7,0.8,0,0.5,1)$.

现给定一个待识别的模糊集$\underset{\sim}{B}=(0.7,0.2,0.1,0.4,1,0.8)$,试用贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{i=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_i)\wedge\underset{\sim}{B}(x_i)]}{\sum_{i=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_i)\vee\underset{\sim}{B}(x_i)]},$$

判别$\underset{\sim}{B}$与标准模型库中的哪个模型最贴近?

7. 设　$\underset{\sim}{A}_1=0.2/x_1+0.4/x_1+0.5/x+0.1/x_4$,

$\underset{\sim}{A}_2=0.1/x_1+0.5/x_2+0.3/x_3+0.1/x_4$,

$\underset{\sim}{A}_3=0.2/x_1+0.3/x_2+0.4/x_3+0.1/x_4$,

$\underset{\sim}{B}=0.6/x_1+0.3/x_2+0.1/x_3$,

试用贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{2\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_k)+\sum_{k=1}^{n}\underset{\sim}{B}(x_k)}$$

判别$\underset{\sim}{B}$与哪个$\underset{\sim}{A}_i$最贴近.

8. 心理素质识别 在运动员心理选材中,以"内-克"表的9个指标为论域,即

$$X=\{m_1,m_2,r_1,r_2,s_1,s_2,v,n,t\}.$$

已知某类优秀运动员

$$\underset{\sim}{E}=0.83/m_1+0.84/m_2+0.95/r_1+0.96/r_1+0.94/s_1$$
$$+0.93/s_2+0.99/v+0.97/n+0.99/t,$$

以及两名选手

$$\underset{\sim}{A}_1=0.86/m_1+0.96/m_2+0.78/r_1+1/r_2+0.84/s_1+0.95/s_2$$
$$+0.65/v+0.94/n+0.86/t,$$
$$\underset{\sim}{A}_2=0.99/m_1+0.99/m_2+0.89/r_1+0.9/r_2+0.93/s_1$$
$$+0.92/s_2+0.88/v+0.77/n+0.99/t,$$

试按贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]}$$

对两名运动员作一心理选材.

9. 模糊识别 对某个国家不同的三个民族G_1、G_2、G_3的身高x_1、坐高x_2、鼻深x_3和鼻高x_4进行抽样调查获得样本的聚类中心,结果如表3.14所示.

表3.14

民　族	x_1/cm	x_2/cm	x_3/mm	x_4/mm
G_1	164.51	86.43	25.49	51.24
G_2	160.53	81.47	23.84	48.62
G_3	158.17	81.16	21.44	46.72

现测得某人的$x_1=162.23$ cm,$x_2=84.34$ cm,$x_3=22.11$ mm,$x_4=47.56$ mm. 试用模糊识别方法比较合理地判别这个人应属于哪个民族.

10. 天气预报 在天气预报评分中,定义天气预评分$s=\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$,其中$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$为$\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$的格贴近度:

$$\underset{\sim}{A}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma}\right)^2},\quad \underset{\sim}{B}(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma}\right)^2}.$$

其中a_1为实况值,a_2为预报道,σ为标准差,今有某气象站预报甲、乙两地某月降水量,甲地预报为220 mm,实况为225 mm,标准差为30 mm;乙地预报为40 mm,实况为0.5 mm,标准差为1 mm. 试分别求出甲、乙两地天气预评分.

11. 天气预报 在天气预报中,定义区域预评分$s=\sigma(\varphi_1,\varphi_2)\times 100$,其中

$$\sigma(\varphi_1,\varphi_2)=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\varphi_1(t_{1k})-\varphi_2(t_{2k})|$$

为 φ_1,φ_2 的距离贴近度.

$$\varphi_i(t_{ik})=\frac{\underset{\sim}{F}(t_{ik})-\underset{\sim}{F}(-1.5)}{\underset{\sim}{F}(1.5)-\underset{\sim}{F}(-1.5)}\quad(i=1,2),$$

$$\underset{\sim}{F}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\quad t_{ik}=\frac{x_{ik}-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{2},$$

$i=1$ 为实况值,$i=2$ 为预报值,$k=1,2,\cdots,n$ 为区域台站号,$\bar{x}$ 为多年平均值,σ 为标准差,某区域预报情况如表 3.15 所示. 又该区内多年平均值为 $\bar{x}=14.0$ ℃,标准差为 1 ℃,试求区域天气预评分.

表 3.15

		站号 k				
		1	2	3	4	5
月平均温度/℃	实况(t_{1k})	14.0	15.0	16.8	14.5	13.4
	预报(t_{2k})	14.0	15.0	16.0	14.0	15.0

12. 规定贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\xlongequal{\text{def}}1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|$$

为距离贴近度,试证明:

(1) $0\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\leqslant1$;　(2) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$;

(3) $\sigma(\Phi,X)=0$;　(4) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\Leftrightarrow\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$.

13. 规定贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\int_X[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x)]\mathrm{d}\mu}{\int_X[\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x)]\mathrm{d}\mu},$$

试证明 $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\in[0,1]$,且满足:

(1) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A})$;

(2) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$;

(3) $\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=0\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\Phi$;

(4) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\Leftrightarrow\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$.

第4章　模糊决策

决策是在人们生活和工作中普遍存在的一种活动，是为解决当前或未来可能发生的问题而选择最佳方案的过程.本章主要是从意见集中、二元对比和综合评判这三方面对模糊决策作些介绍.模糊决策的目的是要把论域中的对象按优劣进行排序，或者按某种方法从论域中选择一个“令人满意”的方案.本章最后介绍了模糊决策在科学技术与经济管理中的应用.

4.1　模糊意见集中决策

在实际问题中，可供选择的方案往往有多个，记为一个集合U.由于决策环境(即自然状态)具有模糊性，方案集合U中蕴藏的决策目标是很难确切描述的.因此，可供选择的方案集合U也是模糊集.我们的问题就是要对U中的元素进行排序.

4.1.1　问题的数学提法

为了对供选择的方案集合(即论域)$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$中的元素进行排序，可由m个专家组成专家小组M(记$|M|=m$)分别对U中元素排序，则得到m种意见：

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}.$$

这些意见往往是模糊的，可以是专家的总体印象，还包括心理因素等.将这m种意见集中为一个比较合理的意见，称之为“模糊意见集中决策”.

这种决策有着广泛而深刻的实际背景.工作中我们会遇到各种各样的评选，比如评聘教授、评选先进工作者、评选获奖项目等.在民主讨论过程中，大都有许多不同意见.如何集中这些意见，传统的集体表决、领导裁决等办法都具有不合理之处.因此，给出一种定量决策模型，作为定性决策的辅助手段是十分必要的.

4.1.2　模糊意见集中决策的方法与步骤

设论域$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，将U中的元素进行排序.专家组$|M|=m$(人)，发表m种意见，记为

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}.$$

其中v_i是第i种意见序列，即U中元素的某一个排序.

令$u\in U$，$B_i(u)$表示第i种意见序列v_i中排在u之后的元素个数，即

若u在第i种意见v_i中排在第一位，则$B_i(u)=n-1$；

若u在第i种意见v_i中排在第二位，则$B_i(u)=n-2$；

…………

若u在第i种意见v_i中排在第k位，则$B_i(u)=n-k$.

称
$$B(u)=\sum_{i=1}^{m}B_i(u)$$
为u的波达(Borda)数. 论域U的所有元素可按波达数的大小排序，此排序就是集中意见之后的一个比较合理的意见.

例4.1.1 设$U=\{a,b,c,d,e,f\}$，$|M|=m=4$人，有

$$v_1:a,c,d,b,e,f;\quad v_2:e,b,c,a,f,d;$$
$$v_3:a,b,c,e,d,f;\quad v_4:c,a,b,d,e,f.$$
$$B_1(a)=6-1=5,\quad B_2(a)=2,\quad B_3(a)=5,\quad B_4(a)=4,$$

所以
$$B(a)=\sum_{i=1}^{4}B_i(a)=5+2+5+4=16.$$

类似地
$$B(b)=\sum_{i=1}^{4}B_i(b)=2+4+4+3=13,$$
$$B(c)=\sum_{i=1}^{4}B_i(c)=4+3+3+5=15,$$
$$B(d)=\sum_{i=1}^{4}B_i(d)=3+0+1+2=6,$$
$$B(e)=\sum_{i=1}^{4}B_i(e)=1+5+2+1=9,$$
$$B(f)=\sum_{i=1}^{4}B_i(f)=0+1+0+0=1.$$

按波达数集中后的排序为a,c,b,e,d,f.

需要指出的是，此方法简单易行，但有时会出现集中的意见与人们的直觉不相吻合的情况，这时可按加权波达数排序.

例4.1.2 排序 设有6名运动员$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$参加五项全能比赛，已知他们每项比赛的名次如表4.1所示.

表4.1

项目	名次					
	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名	第六名
200 m跑	u_1	u_2	u_4	u_3	u_6	u_5
1500 m跑	u_2	u_3	u_6	u_5	u_4	u_1
跳远	u_1	u_2	u_4	u_3	u_5	u_6
掷铁饼	u_1	u_2	u_3	u_4	u_6	u_5
掷标枪	u_1	u_2	u_4	u_5	u_6	u_3

$$B_1(u_1)=5,\quad B_2(u_1)=0,\quad B_3(u_1)=5,\quad B_4(u_1)=5,\quad B_5(u_1)=5,$$

所以
$$B(u_1)=20.$$
类似地
$$B(u_2)=21,\quad B(u_3)=11,\quad B(u_4)=12,$$
$$B(u_5)=5,\quad B(u_6)=6.$$

按波达数集中后的排序为u_2,u_1,u_4,u_3,u_6,u_5. 这个集中的意见就与人们的直觉不相吻合. 因为u_1得到了4个第一名(金牌),u_2只得了1个第一名,但却出现了u_2比u_1的总分多1分的现象,u_2排在第一是不合理的.

若提高第一名(金牌)的权重(表4.2),则得到的排序就比较合理了.

表 4.2

名　次	一	二	三	四	五	六
波达数	5	4	3	2	1	0
权重 A	0.35	0.25	0.18	0.11	0.07	0.04

按表4.2所给权重分别计算加权波达数,得

$$B(u_1)=4\times5\times0.35+0\times0.04=7,$$
$$B(u_2)=5\times0.35+4\times4\times0.25=5.75,$$
$$B(u_3)=4\times0.25+3\times0.18+2\times2\times0.11+0\times0.04=1.98,$$
$$B(u_4)=3\times3\times0.18+2\times0.11+1\times0.07=1.91,$$
$$B(u_5)=2\times2\times0.11+1\times0.07+2\times0\times0.04=0.51,$$
$$B(u_6)=3\times0.18+3\times1\times0.07+0\times0.04=0.75.$$

按加权波达数集中后的排序为u_1,u_2,u_3,u_4,u_6,u_5. 这是一个比较合理的意见,与人们的直觉也相吻合.

4.2　模糊二元对比决策

实践告诉我们,人们认识事物往往是从两个事物的对比开始的. 一般先对两个对象进行比较,然后再换两个进行比较,如此重复多次. 每作一次比较就得到一个认识,而这种认识是模糊的,诸如甲比乙的条件要优越些等. 将这种模糊认识数量化,最后用模糊数学方法给出总体排序,这就是模糊二元对比决策.

4.2.1　模糊优先关系排序决策

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为n个备选方案(对象),在U上确定一个模糊集$\underset{\sim}{A}$,运用模糊数学方法在n个备选方案中建立一种模糊优先关系,然后将它们排出一个优劣次序,这就是模糊优先关系排序决策.

以r_{ij}表示x_i与x_j相比较时x_i对于$\underset{\sim}{A}$比x_j对于$\underset{\sim}{A}$优越的程度,或称x_i对x_j的优

先选择比.尽管备选方案在对比中各有所长,但要求优先选择比r_{ij}满足

$$\left.\begin{array}{l} r_{ii}=0, \quad 0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1 \quad (i \neq j) \\ r_{ij}+r_{ji}=1. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

上述条件表明:x_i 与 x_i 相比较时,没有什么优越,记$r_{ii}=0$,x_i 与 x_j 相比较时总是各有所长,把两者的优越成分合在一起就是1,即$r_{ij}+r_{ji}=1$;当只发现x_i 比 x_j 有长处而未发现x_j 比x_i 有任何长处时,记$r_{ij}=1$,$r_{ji}=0$;当x_i 与x_j 相比较时不分优劣,记$r_{ij}=r_{ji}=0.5$.

称满足式(4.1)的r_{ij}组成的矩阵

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$$

为模糊优先关系矩阵,由此矩阵确定的关系称为模糊优先关系.

取定阈值$\lambda\in[0,1]$,得λ-截矩阵

$$\boldsymbol{R}_\lambda=(r_{ij}^{(\lambda)}),$$

其中

$$r_{ij}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant\lambda,\\ 0, & r_{ij}<\lambda.\end{cases}$$

当λ由1逐渐下降时,若首次出现的$\boldsymbol{R}_\lambda$,它的第i_1行元素除对角线元素外全等于1,则认定x_{i_1}是第一优越对象(不一定唯一);再在$\boldsymbol{R}$中划去x_{i_1}所在的行与列,得到一个新的$n-1$阶模糊矩阵,用同样的方法获取最优对象作为第二优越对象;如此递推下去,可将全体对象排出一定的优劣次序.

例4.2.1 排序 设$U=\{x_1,x_2,x_3\}$(子女),在U上确定了一个模糊集$\underset{\sim}{A}$="子女像父亲".已知其模糊优先关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{bmatrix}.$$

令λ从大到小依次取λ-截矩阵:

取$\lambda=0.9$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.9}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

取$\lambda=0.8$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.8}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

取$\lambda=0.7$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.7}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

取$\lambda=0.3$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.3}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

当λ降至0.3时,在$\boldsymbol{R}_{0.3}$中首次出现:第3行除对角线上的元素外全等于1.因此

把 x_3 作为第一优越对象,在 $\boldsymbol{R}$ 中划去 x_3 所在的行与列,得模糊优先关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0.9\\ 0.1 & 0\end{pmatrix}.$$

取 $\lambda=0.9$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.9}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

把 x_1 作为第二优越对象. 因此,x_1,x_2,x_3 的模糊优先关系排序为 x_3,x_1,x_2.

有了这个排序后,可以建立模糊集 $\underset{\sim}{A}$ = "子女像父亲"的隶属函数.

若把排在第一位的隶属度记为1,则排在第二、第三位依次记为2/3,1/3.

为了更符合实际一些,$\underset{\sim}{A}$ = "子女像父亲"的隶属函数可定义为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}k\times 1, & x=x_3,\\ k\times 2/3, & x=x_1,\\ k\times 1/3, & x=x_2,\end{cases}$$

其中 k 是比例常数,必须使 k 满足

$$0\leqslant \vee\left[\underset{\sim}{A}(x_1),\underset{\sim}{A}(x_2),\underset{\sim}{A}(x_3)\right]\leqslant 1.$$

在本例中,$0\leqslant k\leqslant 1$. 如果认为"子女"x_3 与"父亲"相像程度为0.9,则在本例中可取 $k=0.9$,这时模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数又可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}.$$

注意 在式(4.1)中,当 x_i 自身作比较时,由于自己没有比自己优越的成分,所以自然地取 $r_{ii}=0$. 实际上,取 $r_{ii}=1$ 或 $r_{ii}=0.5$ 也无妨,反正意思是一样的,即自己与自己比较时无优越成分. 若取 $r_{ii}=1$,即模糊优先关系矩阵的对角线上的元素全为1,当用 λ-截矩阵去求各个优越对象时,可以去掉"除对角线元素外"这句话. 只要第 i_1 行元素全等于1,则认定 x_{i_1} 为第一优越对象,如此等等.

建议读者用此法再做一下例4.2.1.

还应指出,模糊优先关系排序决策的关键是如何建立模糊优先关系矩阵,下面举例说明建立模糊优先关系矩阵的一个方法.

例4.2.2 推选先进工作者 某单位有7个科室,每个科室推选一名先进工作者,现要求对这7名先进工作者按规定的条件再排一个次序.

设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$($x_i$:职工中的候选对象),$\underset{\sim}{A}$ = "先进工作者"是 U 上的模糊集,现将他们进行排序. 由单位负责人、群众代表组成评议组 $|M|=m=10$(人),评分标准如表4.3所示.

表4.3

评分标准	一等	二等	三等	四等	五等	六等
分　数	10	8	6	4	3	1

将科室推荐的先进工作者两两进行比较评分. 例如: $x_1 \to x_2$(以先评价的 x_2 为基准, 后评价的 x_1 为对象进行相对比较评分). 比如10人所给评分相加得总分为80分, 则 x_1 对 x_2 的优先选择比为 $r_{12}=\frac{80}{100}=0.80$(其中分母100为10人都给最高分时的总分), 相应地, x_2 对 x_1 的优先选择比为 $r_{21}=1-r_{12}=1-0.8=0.2$. 利用上述方法得出的结果如表4.4所示.

表4.4

	分数						评选组给被评人总分	优先选择比 r_{ij}
	一等	二等	三等	四等	五等	六等		
	10	8	6	4	3	1		
$x_1 \to x_2$	3	4	3	—	—	—	80	0.80
$x_1 \to x_3$	1	5	3	1	—	—	72	0.72
$x_1 \to x_4$	2	5	2	1	—	—	76	0.76
$x_1 \to x_5$	6	2	1	1	—	—	86	0.86
$x_1 \to x_6$	3	1	4	2	—	—	70	0.70
$x_1 \to x_7$	4	3	1	2	—	—	78	0.78
$x_2 \to x_3$	1	4	3	2	—	—	68	0.68
$x_2 \to x_4$	4	2	1	1	1	1	70	0.70
$x_2 \to x_5$	2	2	3	2	—	1	63	0.63
$x_2 \to x_6$	5	2	1	2	—	—	80	0.80
$x_2 \to x_7$	3	2	3	1	1	—	71	0.71
$x_3 \to x_4$	—	2	3	4	1	—	53	0.53
$x_3 \to x_5$	2	3	—	1	2	2	56	0.56
$x_3 \to x_6$	—	2	2	1	2	3	41	0.41
$x_3 \to x_7$	1	2	3	2	—	2	54	0.54
$x_4 \to x_5$	—	—	2	3	1	4	31	0.31
$x_4 \to x_6$	—	1	1	2	3	3	34	0.34
$x_4 \to x_7$	1	—	1	2	3	3	36	0.36
$x_5 \to x_6$	1	2	1	2	1	3	46	0.46
$x_5 \to x_7$	1	—	2	3	1	3	40	0.40
$x_6 \to x_7$	1	2	—	2	2	3	43	0.43

根据表4.4给出的优先选择比 r_{ij} 及其所满足的条件($r_{ij}+r_{ji}=1$, 取 $r_{ii}=1$), 得如表4.5所示的结果.

表4.5

对象	基准						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	0.80	0.72	0.76	0.86	0.70	0.78
x_2	0.20	1	0.68	0.70	0.63	0.80	0.71
x_3	0.28	0.32	1	0.53	0.56	0.41	0.54
x_4	0.24	0.30	0.47	1	0.31	0.34	0.36
x_5	0.14	0.37	0.44	0.69	1	0.46	0.40
x_6	0.30	0.20	0.59	0.66	0.54	1	0.43
x_7	0.22	0.29	0.46	0.64	0.60	0.57	1

由表4.5得模糊优先关系矩阵$\boldsymbol{R}^{(1)}$为

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0.80 & 0.72 & 0.76 & 0.86 & 0.70 & 0.78\\ 0.20 & 1 & 0.68 & 0.70 & 0.63 & 0.80 & 0.71\\ 0.28 & 0.32 & 1 & 0.53 & 0.56 & 0.41 & 0.54\\ 0.24 & 0.30 & 0.47 & 1 & 0.31 & 0.34 & 0.36\\ 0.14 & 0.37 & 0.44 & 0.69 & 1 & 0.46 & 0.40\\ 0.30 & 0.20 & 0.59 & 0.66 & 0.54 & 1 & 0.43\\ 0.22 & 0.29 & 0.46 & 0.64 & 0.60 & 0.57 & 1\end{pmatrix},$$

取$\lambda=0.70$，得λ-截矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{0.7}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

λ-截矩阵$\boldsymbol{R}_{0.7}^{(1)}$的第1行元素全等于1，说明只有$x_1$的优越程度超过了0.70，所以职工$x_1$为第一优越对象.

除去$\boldsymbol{R}^{(1)}$中第一优越对象x_1所在的行与列，得到新的模糊优先关系矩阵$\boldsymbol{R}^{(2)}$为

$$\boldsymbol{R}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0.68 & 0.70 & 0.63 & 0.80 & 0.71\\ 0.32 & 1 & 0.53 & 0.56 & 0.41 & 0.54\\ 0.30 & 0.47 & 1 & 0.31 & 0.34 & 0.36\\ 0.37 & 0.44 & 0.69 & 1 & 0.46 & 0.40\\ 0.20 & 0.59 & 0.66 & 0.54 & 1 & 0.43\\ 0.29 & 0.46 & 0.64 & 0.60 & 0.57 & 1\end{pmatrix},$$

取$\lambda=0.63$，得

$$R_{0.63}^{(2)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

λ-截矩阵$R_{0.63}^{(2)}$的第1行元素全等于1，应取x_2作为第二优越对象.

划去矩阵$R^{(2)}$中第二优越对象x_2所在的行与列，得到新的模糊优先关系矩阵$R^{(3)}$为

$$R^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0.53&0.56&0.41&0.54\\0.47&1&0.31&0.34&0.36\\0.44&0.69&1&0.46&0.40\\0.59&0.66&0.54&1&0.43\\0.46&0.64&0.60&0.57&1\end{pmatrix},$$

取$\lambda=0.46$，得

$$R_{0.46}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

可知x_7为第三优越对象.

划去矩阵$R^{(3)}$中第三优越对象x_7所在的行与列，得到新的模糊优先关系矩阵$R^{(4)}$为

$$R^{(4)}=\begin{pmatrix}1&0.53&0.56&0.41\\0.47&1&0.31&0.34\\0.44&0.69&1&0.46\\0.59&0.66&0.54&1\end{pmatrix},$$

取$\lambda=0.54$，得

$$R_{0.54}^{(4)}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},$$

可知x_6可作为第四优越对象.

类似地，可得$R^{(5)}$为

$$R^{(5)}=\begin{pmatrix}1&0.53&0.56\\0.47&1&0.31\\0.44&0.69&1\end{pmatrix},$$

取 $\lambda=0.53$，得
$$R_{0.53}^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$
可知 x_3 可作为第五优越对象. 同样
$$R^{(6)}=\begin{pmatrix}1&0.31\\0.69&1\end{pmatrix},$$
取 $\lambda=0.69$，得
$$R_{0.69}^{(6)}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$
可知 x_5 可作为第六优越对象. 因此 7 名先进工作者的模糊优选关系排序为
$$x_1,x_2,x_7,x_6,x_3,x_5,x_4.$$

在实际问题中，让人们直接给出模糊集的隶属度是比较困难的. 但是，对于论域 U 中的两个元素 x_1 和 x_2，就某个性质比较优劣，或者对某个模糊集比较隶属度的大小，都是比较容易的. 比如，给你两所大学的资料，让你算出它们分别对于“优秀学校”的隶属度，那是很困难的. 但是，就教学而言，你可以说甲优于乙；就科研而言，你可以说乙优于甲；等等. 这样通过指标的分解与比较就简化了思维难度.

下面介绍在有限论域上通过二元对比排序建立模糊集的隶属函数的方法.

设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$ 是一模糊集，我们的问题是在知道了模糊优先关系矩阵 $\boldsymbol{R}$ 后，如何确定模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数. 事实上，对模糊关系矩阵 $\boldsymbol{R}$ 进行适当的数学加工处理后，即可得出模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，下面介绍通常采用的几种方法.

方法 1 最小法
$$\underset{\sim}{A}(x_i)=\bigwedge_{j\neq i}r_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n,$$
$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(x_1)}{x_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(x_n)}{x_n}.$$
这实际上是模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数的离散表示法.

方法 2 平均法
$$\underset{\sim}{A}(x_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}r_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

方法 3 加权平均法
$$\underset{\sim}{A}(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\delta_j r_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n,$$
其中 $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 是一组权重.

以例 4.2.2 中的模糊优先关系矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为例，用平均法，得
$$\underset{\sim}{A}(x_1)=0.66,\quad \underset{\sim}{A}(x_2)=0.53,\quad \underset{\sim}{A}(x_3)=0.38,\quad \underset{\sim}{A}(x_4)=0.29,$$
$$\underset{\sim}{A}(x_5)=0.36,\quad \underset{\sim}{A}(x_6)=0.39,\quad \underset{\sim}{A}(x_7)=0.40.$$

$$\underset{\sim}{A}(\text{先进工作者})=\frac{0.66}{x_1}+\frac{0.53}{x_2}+\frac{0.38}{x_3}+\frac{0.29}{x_4}+\frac{0.36}{x_5}+\frac{0.39}{x_6}+\frac{0.40}{x_7}.$$

根据隶属度的大小,7 名先进工作者的排序为

$$x_1, x_2, x_7, x_6, x_3, x_5, x_4.$$

4.2.2 模糊相似优先比决策

模糊相似优先比决策也是一种二元对比决策.即先利用二元相对比较级定义一个模糊相似优先比 r_{ij},从而建立模糊优先比矩阵,然后通过确定 λ-截矩阵来对所有的备选方案进行排序.

定义 4.2.1 设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,对于给定的一对元素 (x_i,x_j),若存在数对 $(f_j(x_i),f_i(x_j))$,满足

$$0\leqslant f_j(x_i)\leqslant 1,\quad 0\leqslant f_i(x_j)\leqslant 1,$$

使得在 x_i 与 x_j 的比较中,如果 x_i 具有某种特性的程度为 $f_j(x_i)$,那么 x_j 具有该特性的程度为 $f_i(x_j)$.这时称 $(f_j(x_i),f_i(x_j))$ 为 x_i 与 x_j 对该特性的二元相对比较级,简称二元比较级.

当 $i=j$ 时,令 $f_i(x_i)=1$.

定义 4.2.2 称模糊矩阵

$$\Phi=\begin{pmatrix} 1 & f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & 1 & f_3(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & f_n(x_{n-1}) \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

为二元相对比较矩阵.

下面介绍模糊相似优先比决策的方法与步骤.

第一步:设论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是备选方案集.

第二步:确定模糊相似优先比 r_{ij},建立模糊优先比矩阵.

若 $(f_j(x_i),f_i(x_j))$ 是二元比较级,令

$$r_{ij}=\frac{f_j(x_i)}{f_j(x_i)+f_i(x_j)},\quad r_{ji}=\frac{f_i(x_j)}{f_j(x_i)+f_i(x_j)},\tag{4.2}$$

得
$$r_{ii}=0.5,\quad \text{且}\quad r_{ij}+r_{ji}=1,$$

则称 r_{ij} 为模糊相似优先比,而 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊相似优先比矩阵.条件 $r_{ii}=0.5$ 表明自己与自己的优先程度是等同的.

第三步:用类似于模糊优先关系排序决策中确定 λ-截矩阵的方法来对所有备选方案进行排序.

第三步也可用下述方法来实现:

将模糊优先矩阵各行非对角线元素取下确界,然后找出这些下确界中最大者所在的行,即可求出第一优越对象;对划去第一优越对象所在行与列所得的矩阵重复上述作法,便可得到U中所备选方案的一个优劣次序.

例4.2.3 菊花的排序 菊花是一种用途很广的植物,它不仅可供药用、食用,而且具有独特的观赏价值.某高校观赏植物专业每年要举办菊花展览,并请新生就菊花的"美"("美"指花的形、色、气等,都是模糊概念)进行排序.

设论域$U=\{$西洋滨菊(x_1),万寿菊(x_2),亚蓝菊(x_3),翠菊(x_4),秋菊$(x_5)\}$,"美的菊花"$=\underset{\sim}{A}$是U上的一个模糊集.

设菊花"美"的标准是花的造型好、颜色艳、香气正,并记为x.试考虑x_1和x_2与x的接近程度.

若x_1与x的贴近程度为0.8,x_2与x的贴近程度为0.4,则x_1与x_2的二元相对比较为

$$(f_2(x_1),f_1(x_2))=(0.8,0.4).$$

类似地,x_1和x_3与x比较得

$$(f_3(x_1),f_1(x_3))=(0.9,0.5);$$

x_1和x_4与x比较得

$$(f_4(x_1),f_1(x_4))=(0.7,0.6);$$

x_1和x_5与x比较得

$$(f_5(x_1),f_1(x_5))=(0.9,0.3);$$

x_2和x_3与x的比较得

$$(f_3(x_2),f_2(x_3))=(0.7,0.4);$$

x_2和x_4与x的比较得

$$(f_4(x_2),f_2(x_4))=(0.4,0.9);$$

x_2和x_5与x的比较得

$$(f_5(x_2),f_2(x_5))=(0.8,0.5);$$

x_3和x_4与x的比较得

$$(f_4(x_3),f_3(x_4))=(0.9,0.2);$$

x_3和x_5与x的比较得

$$(f_5(x_3),f_3(x_5))=(0.8,0.7);$$

x_4和x_5与x的比较得

$$(f_5(x_4),f_4(x_5))=(0.2,0.7).$$

于是,得到二元相对比较矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}0.5&0.8&0.9&0.7&0.9\\0.4&0.5&0.7&0.4&0.8\\0.5&0.4&0.5&0.9&0.8\\0.6&0.9&0.2&0.5&0.2\\0.3&0.5&0.7&0.7&0.5\end{pmatrix}.$$

由式(4.2)得模糊优先比矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.5&\frac{8}{12}&\frac{9}{14}&\frac{7}{13}&\frac{9}{12}\\\frac{4}{12}&0.5&\frac{7}{11}&\frac{4}{13}&\frac{8}{13}\\\frac{5}{14}&\frac{4}{11}&0.5&\frac{9}{11}&\frac{8}{15}\\\frac{6}{13}&\frac{9}{13}&\frac{2}{11}&0.5&\frac{2}{9}\\\frac{3}{12}&\frac{5}{13}&\frac{7}{15}&\frac{7}{9}&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5&0.67&0.64&0.54&0.75\\0.33&0.5&0.64&0.31&0.62\\0.36&0.36&0.5&0.82&0.53\\0.46&0.69&0.18&0.5&0.22\\0.25&0.38&0.47&0.78&0.5\end{pmatrix}.$$

取$\lambda=0.54$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.54}=\begin{pmatrix}0.5&1&1&1&1\\0&0.5&1&0&1\\0&0&0.5&1&0\\0&1&0&0.5&0\\0&0&0&1&0.5\end{pmatrix}.$$

λ-截矩阵$\boldsymbol{R}_{0.54}$中除对角线元素外第1行元素全等于1,所以x_1可作为第一优越对象.

除去$\boldsymbol{R}$中x_1所在的行与列后,得到新的模糊优先比矩阵为

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.5&0.64&0.31&0.62\\0.36&0.5&0.82&0.53\\0.69&0.18&0.5&0.22\\0.38&0.47&0.78&0.5\end{pmatrix}.$$

取$\lambda=0.38$,得
$$\boldsymbol{R}_{0.38}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.5&1&0&1\\0&0.5&1&1\\1&0&0.5&0\\1&1&1&0.5\end{pmatrix},$$

可知x_5可为第二优越对象.

类似地,在$R^{(1)}$中划去x_5所在的行与列,得

$$\boldsymbol{R}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5&0.64&0.31\\0.36&0.5&0.82\\0.69&0.18&0.5\end{pmatrix},$$

取 $\lambda=0.36$，得

$$R_{0.36}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0\\ 1 & 0.5 & 1\\ 1 & 0 & 0.5\end{pmatrix},$$

可知 x_3 可作为第三优越对象.

类似地，又得

$$R^{(3)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.31\\ 0.69 & 0.5\end{pmatrix},$$

取 $\lambda=0.69$，得

$$R_{0.69}^{(3)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0.5\end{pmatrix},$$

可知 x_4 可作为第四优越对象. 因此，5 种菊花的排序为

$$x_1, x_5, x_3, x_4, x_2.$$

即西洋滨菊优于秋菊优于亚蓝菊优于翠菊优于万寿菊. 这个结果与实际也是相符的. 据有关专家介绍，西洋滨菊是杂交品种，观赏价值很高，深受人们喜爱，排在第一是符合实际的. 而万寿菊花很美丽、花期极长，只是因为其根、叶很臭，故有些人不很喜欢它，排在第五位也是正常的.

我们也可用另一种方法来排序. 在得到模糊优先比矩阵 $\boldsymbol{R}$ 后，除对角线元素外，各行取下确界，即

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.67 & 0.64 & 0.54 & 0.75\\ 0.33 & 0.5 & 0.64 & 0.31 & 0.62\\ 0.36 & 0.36 & 0.5 & 0.82 & 0.53\\ 0.46 & 0.69 & 0.18 & 0.5 & 0.22\\ 0.25 & 0.38 & 0.47 & 0.78 & 0.5\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\text{下确界}\\ 0.54(\max)\\ 0.31\\ 0.36\\ 0.18\\ 0.25\end{matrix},$$

再找出这些下确界中的最大者所在行：最大者 0.54 在第 1 行，所以 x_1 可作为第一优越对象.

划去第 1 行、第 1 列后，对新矩阵重复上述方法，得

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.64 & 0.31 & 0.62\\ 0.36 & 0.5 & 0.82 & 0.53\\ 0.69 & 0.18 & 0.5 & 0.22\\ 0.38 & 0.47 & 0.78 & 0.5\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\text{下确界}\\ 0.31\\ 0.36\\ 0.18\\ 0.38(\max)\end{matrix},$$

可知 x_5 可作为第二优越对象. 依此类推.

其最后排序与前面结果是一致的，即为 x_1, x_5, x_3, x_4, x_2.

4.2.3 模糊相对比较决策

设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示n个备选方案(对象),先在二元对比中建立二元比较级,然后利用模糊相对比较函数,建立模糊相及矩阵来进行总体排序.

定义4.2.3 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,x_i与x_j的二元比较级为$(f_j(x_i),f_i(x_j))$,称

$$f(x_i|x_j)\xlongequal{\text{def}}\frac{f_j(x_i)}{f_i(x_j)\vee f_j(x_i)} \tag{4.3}$$

为模糊相对比较函数.

由式(4.3)不难看出,$f(x_i|x_j)$具有如下性质:

1° $f(x_i|x_j)\in[0,1]$;

$$2^\circ\ f(x_i|x_j)=\begin{cases}1, & \text{当 } f_j(x_i)>f_i(x_j)\text{ 时},\\ \dfrac{f_j(x_i)}{f_i(x_j)}, & \text{当 } f_j(x_i)\leqslant f_i(x_j)\text{ 时};\end{cases} \tag{4.4}$$

3° $f(x_i|x_i)=1$.

式(4.4)表明了x_i优越于x_j的可能性.当$f_j(x_i)>f_i(x_j)$时,x_i绝对优越于x_j,所以$f(x_i|x_j)=1$;当$f_j(x_i)\leqslant f_i(x_j)$时,$x_i$优越于$x_j$的可能性可用比值$\frac{f_j(x_i)}{f_i(x_j)}$来度量;当$x_i$与$x_i$的优越性等同时,$f(x_i|x_i)=1$,这从模糊相对比较函数的定义式(4.3)也可看出.当然,取$f(x_i|x_i)=0$或0.5也未尝不可,这一点前面曾指出过.

定义4.2.4 设论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记$r_{ij}=f(x_i|x_j)$,则称以r_{ij}为元素的矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$为模糊相及矩阵.于是,有

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & f(x_1|x_2) & \cdots & f(x_1|x_n)\\ f(x_2|x_1) & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & f(x_{n-1}|x_n)\\ f(x_n|x_1) & \cdots & f(x_n|x_{n-1}) & 1\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

在模糊相及矩阵$\boldsymbol{R}$(即式(4.5))中,对$\boldsymbol{R}$的每行求下确界,以最大下确界所在行对应的x_i为第一优越对象;划去第i行与第i列,得$n-1$阶模糊相及矩阵,类似地找出第二优越对象;此法一直做下去,就可对n个备选方案(对象)进行总体排序.

例4.2.4 用模糊相对比较决策对例4.2.3中的5种菊花进行排序.

设论域$U=\{$西洋滨菊(x_1),万寿菊(x_2),亚蓝菊(x_3),翠菊(x_4),秋菊$(x_5)\}$,二元相对比较矩阵为

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.9\\ 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.8\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.9 & 0.8\\ 0.6 & 0.9 & 0.2 & 0.5 & 0.2\\ 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.7 & 0.5\end{pmatrix}.$$

利用模糊相对比较函数的计算公式(4.3)得

$$f(x_1|x_1)=1,$$

$$f(x_1|x_2)=\frac{f_2(x_1)}{f_2(x_1)\vee f_1(x_2)}=\frac{0.8}{0.8\vee 0.4}=1,$$

$$f(x_1|x_3)=\frac{f_3(x_1)}{f_3(x_1)\vee f_1(x_3)}=\frac{0.9}{0.9\vee 0.5}=1,$$

$$f(x_1|x_4)=\frac{f_4(x_1)}{f_4(x_1)\vee f_1(x_4)}=\frac{0.7}{0.7\vee 0.6}=1,$$

$$f(x_1|x_5)=\frac{f_5(x_1)}{f_5(x_1)\vee f_1(x_5)}=\frac{0.9}{0.9\vee 0.3}=1.$$

类似地算得

$$\begin{aligned}
&f(x_2|x_1)=1/2, && f(x_3|x_1)=5/9,\\
&f(x_2|x_2)=1, && f(x_3|x_2)=4/7,\\
&f(x_2|x_3)=1, && f(x_3|x_3)=1,\\
&f(x_2|x_4)=4/9, && f(x_3|x_4)=1,\\
&f(x_2|x_5)=1, && f(x_3|x_5)=1,\\
&f(x_4|x_1)=6/7, && f(x_5|x_1)=3/9,\\
&f(x_4|x_2)=1, && f(x_5|x_2)=5/8,\\
&f(x_4|x_3)=2/9, && f(x_5|x_3)=7/8,\\
&f(x_4|x_4)=1, && f(x_5|x_4)=1,\\
&f(x_4|x_5)=2/7, && f(x_5|x_5)=1.
\end{aligned}$$

于是,由式(4.5)得模糊相及矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1/2 & 1 & 1 & 4/9 & 1\\ 5/9 & 4/7 & 1 & 1 & 1\\ 6/7 & 1 & 2/9 & 1 & 2/7\\ 3/9 & 5/8 & 7/8 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{下确界}\\ 1(\max)\\ 4/9\\ 5/9\\ 2/9\\ 3/9\end{matrix},$$

所以 x_1 选作第一优越对象. 划去 $\boldsymbol{R}$ 的第1行与第1列,得

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4/9 & 1\\ 4/7 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2/9 & 1 & 2/7\\ 5/8 & 7/8 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\text{下确界}\\ 4/9\\ 4/7\\ 2/9\\ 5/8(\max)\end{matrix},$$

所以 x_5 可选作第二优越对象. 划去 $\boldsymbol{R}^{(1)}$ 的第4行与第4列,得

$$R^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4/9\\ 4/7 & 1 & 1\\ 1 & 2/9 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\text{下确界}\\ 4/9\\ 4/7(\max)\\ 2/9\end{matrix},$$

所以 x_3 可选作第三优越对象. 划去 $R^{(2)}$ 的第 2 行与第 2 列,得

$$R^{(3)}=\begin{pmatrix}1 & 4/9\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\text{下确界}\\ 4/9\\ 1(\max)\end{matrix},$$

所以 x_4 可选作第四优越对象. 因此,用模糊相对比较决策作出的5种菊花的总体排序为

$$x_1,x_5,x_3,x_4,x_2.$$

此结果与用模糊相似优先比决策所得结果是一致的.

4.3 模糊综合评判决策

本节从经典的综合评判入手,介绍模糊综合评判决策的理论基础——模糊映射与模糊变换、模糊综合决策的数学模型及其应用;由于权重的确定在模糊综合决策中占有重要地位,因此还专门介绍了权重的确定方法.

4.3.1 经典的综合评判决策

在实际工作中,对一个事物的评价(或评估),常常涉及多个因素或多个指标,这时就要求根据这多个因素对事物作出综合评价,而不能只从某一因素的情况去评价事物,这就是综合评判. 在这里,评判的意思是指按照给定的条件对事物的优劣、好坏进行评比、判别,综合的意思是指评判条件包含多个因素或多个指标. 因此,综合评判就是要对受多个因素影响的事物作出全面评价.

综合评判的方法有许多种,这里介绍最常用的两种.

1. 评总分法

所谓评总分法,就是根据评判对象列出评价项目,对每个项目定出评价的等级,并用分数表示. 将评价项目所得分数累计相加,然后按总分的大小排列次序,以决定方案的优劣.

例如,我国高考成绩的评分方法就是如此. 总分一般表示为

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i,$$

其中 S 表示总分,S_i 表示第 i 个项目得分,n 为项目数.

2. 加权评分法

加权评分法主要是考虑诸因素(或诸指标)在评价中所处的地位或所起的作用

不尽相同,因此不能一律平等地对待诸因素(或诸指标). 于是,就引进了权重的概念,它体现了诸因素(或诸指标)在评价中的不同地位或不同作用. 这种评分法显然较评总分法合理.

加权评分法一般表示为

$$E = \sum_{i=1}^{n} a_i S_i, \tag{4.6}$$

其中E表示加权平均分数,a_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个因素所占的权重,且要求 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

若取权重$a_i = 1/n$,则由式(4.6)求出的就是平均分.

4.3.2 模糊映射与模糊变换

在4.1.2中,曾将映射概念作了两个方面的扩张,即

点-集映射 $f: X \to \mathscr{T}(Y)$,

$$x \mapsto f(x) = B \in \mathscr{T}(Y);$$

集合变换 $T: \mathscr{T}(X) \to \mathscr{T}(Y)$,

$$A \mapsto T(A) = B.$$

现将以上两种变换推广到模糊子集情形.

定义 4.3.1 称映射 $\underset{\sim}{f}: X \to \mathscr{T}(Y)$,

$$x \mapsto \underset{\sim}{f}(x) = \underset{\sim}{B}$$

为从 X 到 Y 的模糊映射.

由定义知,模糊映射是点集映射的推广,即在映射 $\underset{\sim}{f}$ 下,将点 x 变为模糊集 $\underset{\sim}{B}$.

例 4.3.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$,令

$$\underset{\sim}{f}_1: x_1 \mapsto \underset{\sim}{f}_1(x_1) = \frac{1}{y_1} = \{y_1\},$$

$$x_2 \mapsto \underset{\sim}{f}_1(x_2) = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \{y_1, y_2\},$$

$$x_3 \mapsto \underset{\sim}{f}_1(x_3) = \frac{1}{y_3} = \{y_3\},$$

$$x_4 \mapsto \underset{\sim}{f}_1(x_4) = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \{y_1, y_2, y_3\};$$

$$\underset{\sim}{f}_2: x_1 \mapsto \underset{\sim}{f}_2(x_1) = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.3}{y_2} + \frac{0.8}{y_3},$$

$$x_2 \mapsto \underset{\sim}{f}_2(x_2) = \frac{0.3}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{0.5}{y_3},$$

$$x_3 \mapsto \underset{\sim}{f}_2(x_3) = \frac{0}{y_1} + \frac{0.6}{y_2} + \frac{0.9}{y_3},$$

$$x_4 \mapsto \underset{\sim}{f}_2(x_4) = \frac{0.4}{y_1} + \frac{0.7}{y_2} + \frac{0}{y_3}.$$

由定义4.3.1易知，$\underset{\sim}{f}_1$，$\underset{\sim}{f}_2$都是X到Y的模糊映射，并且$\underset{\sim}{f}_1$是(普通意义下的)X到Y的点-集映射.这也说明，点-集映射是模糊映射的特殊情形.

为了方便与直观，我们只给出在有限论域情形下模糊映射$\underset{\sim}{f}$与模糊关系$\underset{\sim}{R}_f$之间的对应关系.

命题4.3.1 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$.

(1) 给定模糊映射

$$\underset{\sim}{f}:X\to\mathscr{F}(Y),\ x_i\mapsto\underset{\sim}{f}(x_i)=\underset{\sim}{B}=\frac{r_{i1}}{y_1}+\frac{r_{i2}}{y_2}+\cdots+\frac{r_{im}}{y_m}$$
$$=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in\mathscr{F}(Y)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

以$(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})(i=1,2,\cdots,n)$为行构造一个模糊矩阵

$$\boldsymbol{R}_f=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1m}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nm}\end{pmatrix},$$

就可唯一确定模糊关系

$$\underset{\sim}{R}_f(x_i,y_i)=r_{ij}=\underset{\sim}{f}(x_i)(y_j).$$

(2) 给出模糊关系矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1m}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nm}\end{pmatrix},$$

可令
$$\underset{\sim}{f}_R:X\to\mathscr{F}(Y),$$
$$x_i\mapsto\underset{\sim}{f}_R(x_i)=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in\mathscr{F}(Y).$$

其中
$$\underset{\sim}{f}_R(x_i)(y_j)=r_{ij}=\underset{\sim}{R}(x_i,y_j),\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m.$$

$\underset{\sim}{f}_R$是X到Y的模糊映射.

于是，也确定了模糊映射$\underset{\sim}{f}_R$.

定义4.3.2 称映射
$$\underset{\sim}{T}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y),$$
$$\underset{\sim}{A}\mapsto\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{B}$$

为X到Y的模糊变换.

由定义可知，模糊变换是集合变换的推广，即在映射$\underset{\sim}{T}$下，将模糊集$\underset{\sim}{A}$变为模糊集$\underset{\sim}{B}$(图4.1).

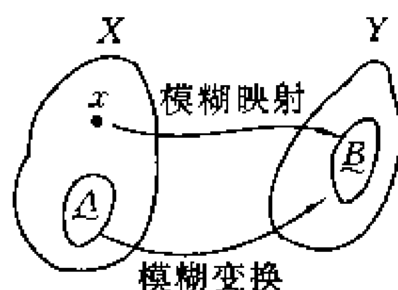


图4.1

若模糊变换$\underset{\sim}{T}$满足

$$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})\cup\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{B}),$$
$$T(\lambda\underset{\sim}{A})=\lambda\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A}),$$

则称$\underset{\sim}{T}$为模糊线性变换.

例4.3.2 设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$,在X上任取一模糊子集

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}.$$

令

$$\underset{\sim}{T}:\underset{\sim}{A}\mapsto\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})=\frac{0.3}{y_1}+\frac{0.5}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\underset{\sim}{B},$$

$\underset{\sim}{B}$是Y上的模糊子集.因此,$\underset{\sim}{T}$是X到Y的一个模糊变换.

例4.3.3 设$f:X\to Y$,由1.4节的扩张原理知

$$\underset{\sim}{T}:\mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y),$$

$$\underset{\sim}{A}\mapsto\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})\overset{\text{def}}{=\!=}f(\underset{\sim}{A}),$$

$$\underset{\sim}{T}^{-1}:\mathscr{T}(Y)\to\mathscr{T}(X),$$

$$\underset{\sim}{B}\mapsto\underset{\sim}{T}^{-1}(\underset{\sim}{B})\overset{\text{def}}{=\!=}f^{-1}(\underset{\sim}{B}),$$

则$\underset{\sim}{T}$是X到Y的模糊线性变换,$\underset{\sim}{T}^{-1}$是Y到X的模糊线性变换.

定义4.3.3 设$\underset{\sim}{T}$是X到Y的模糊线性变换,且

$$\underset{\sim}{R}_T\in\mathscr{T}(X\times Y)$$

满足$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_T(\forall\ \underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(X))$,则称$\underset{\sim}{T}$是由模糊关系$\underset{\sim}{R}_T$诱导出的.

我们仍只给出有限论域上的模糊线性变换与模糊关系之间的对应关系.

命题4.3.2 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,则有:

(1) 给定模糊关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1m}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\r_{n1}&r_{n2}&\cdots&r_{nm}\end{pmatrix}$$

$$\forall\underset{\sim}{A}=\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathscr{T}(X),$$

可以按定义4.3.3确定一个模糊线性变换(取max-min合成运算)

$$\underset{\sim}{T}_{\boldsymbol{R}}:\mathscr{T}(X)\to\mathscr{T}(Y),$$

$$\underset{\sim}{A}\mapsto\underset{\sim}{T}_{\boldsymbol{R}}(\underset{\sim}{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)\in\mathscr{T}(Y),$$

其中

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

并称$\underset{\sim}{T}_{\boldsymbol{R}}$是由模糊关系$\boldsymbol{R}$诱导出的.

(2) 按定义4.3.3方式给定了模糊线性变换$\underset{\sim}{T}_{\boldsymbol{R}}$,即

$$\underset{\sim}{T}_{\boldsymbol{R}}(\underset{\sim}{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R},$$

并给定了$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{T}(X)$,则由本节后面要讲的模糊关系方程可以确定模糊矩阵$\boldsymbol{R}$,从而也确定了模糊关系$\underset{\sim}{R}$.

例4.3.4 设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$,

$$R=\begin{pmatrix}0.5 & 0.2 & 0 & 1\\ 1 & 0.3 & 0 & 0.1\\ 0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.2\\ 0.3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{F}(X\times Y),$$

$\underset{\sim}{T}_R$ 为由 $\boldsymbol{R}$ 诱导出的 X 到 Y 的模糊变换.

(1) $\underset{\sim}{A}=\{x_2,x_4\}$,求 $\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{A})$;

(2) $\underset{\sim}{B}=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{1}{x_4}$,求 $\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})$.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}=(0,1,0,1,0),$$

$$\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=(1,1,0,0.1)=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{0}{y_3}+\frac{0.1}{y_4};$$

(2)

$$\boldsymbol{B}=(0.5,0.6,0.9,1,0),$$

$$\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})=\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{R}=(0.6,1,0.4,0.5)=\frac{0.6}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{0.4}{y_3}+\frac{0.5}{y_4}.$$

从此例中可看出,由模糊关系可诱导出模糊线性变换.

例 4.3.5 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$Y=\{y_1,y_2\}$. $\underset{\sim}{f}$ 是 X 到 Y 的模糊映射,$\underset{\sim}{T}_f$ 是由 $\underset{\sim}{f}$ 确定的 X 到 Y 的模糊变换. 已知

$$\underset{\sim}{T}_f(\{x_1\})=\frac{0.2}{y_1}+\frac{0.5}{y_2},\quad \underset{\sim}{T}_f(\{x_1,x_2\})=\frac{0.3}{y_1}+\frac{0.6}{y_2},$$

$$\underset{\sim}{T}_f(\{x_2,x_3\})=\frac{0.5}{y_1}+\frac{0.7}{y_2},$$

试求模糊映射 $\underset{\sim}{f}$.

解 本例的解题思路是:在 $\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}$ 中,已知 $\underset{\sim}{T}_R$,$\underset{\sim}{A}$,根据命题 4.3.2 求出 $\boldsymbol{R}$,这就是模糊关系 $\underset{\sim}{R}$. 再根据命题 4.3.1 由模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 求出模糊映射 $\underset{\sim}{f}$.

因为 $\underset{\sim}{T}_f$ 是由 $\underset{\sim}{f}$ 诱导出的,所以

$$\underset{\sim}{T}_f(\underset{\sim}{A})=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}_f.$$

令

$$\boldsymbol{R}_f=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\\ r_{31} & r_{32}\end{pmatrix},$$

依题意,有

$$(1,0,0)\circ\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\\ r_{31} & r_{32}\end{pmatrix}=(0.2,0.5),\tag{4.7}$$

$$(1,1,0)\circ\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\\ r_{31} & r_{32}\end{pmatrix}=(0.3,0.6),\tag{4.8}$$

$$(0,1,1)\circ\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\\ r_{31} & r_{32}\end{pmatrix}=(0.5,0.7). \tag{4.9}$$

由式(4.7),得 $r_{11}=0.2,\quad r_{12}=0.5;$

由式(4.8),得 $r_{11}\vee r_{21}=0.3,\quad r_{12}\vee r_{22}=0.6,$

即 $0.2\vee r_{21}=0.3,\quad 0.5\vee r_{22}=0.6.$

故 $r_{21}=0.3,\quad r_{22}=0.6;$

由式(4.9),得 $r_{21}\vee r_{31}=0.5,\quad r_{22}\vee r_{32}=0.7,$

即 $0.3\vee r_{31}=0.5,\quad 0.6\vee r_{32}=0.7,$

故 $r_{31}=0.5,\quad r_{32}=0.7.$

从而

$$\boldsymbol{R}_f=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.6\\ 0.5 & 0.7\end{pmatrix},$$

根据命题4.3.1,令 $\underset{\sim}{f}:X\to\mathscr{F}(Y)$,即

$$x_i\mapsto \underset{\sim}{f}_R(x_i)=(r_{i1},r_{i2})\quad(i=1,2,3),$$

$$x_1\mapsto \underset{\sim}{f}_R(x_1)=(0.2,0.5)=\frac{0.2}{y_1}+\frac{0.5}{y_2},$$

$$x_2\mapsto \underset{\sim}{f}_R(x_2)=(0.3,0.6)=\frac{0.3}{y_1}+\frac{0.6}{y_2},$$

$$x_3\mapsto \underset{\sim}{f}_R(x_3)=(0.5,0.7)=\frac{0.5}{y_1}+\frac{0.7}{y_2}.$$

这就是所求的模糊映射 $\underset{\sim}{f}$.

最后指出一点,命题4.3.1与命题4.3.2对于无限论域也是成立的,即给定一个 X 到 Y 的模糊映射 $\underset{\sim}{f}:X\to\mathscr{F}(Y)$,可以诱导出一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}_f\in\mathscr{F}(X\times Y)$(命题4.3.1);由模糊关系 $\underset{\sim}{R}_f$ 可诱导出一个 X 到 Y 的模糊线性变换 $\underset{\sim}{T}_f:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$(命题4.3.2).由于两两都是1—1对应关系,因此,模糊映射、模糊关系和模糊线性变换实际上是同一事物的不同表现形式,在一定条件下,它们彼此是等价的.由模糊映射 $\underset{\sim}{f}$ 诱导出模糊线性变换 $\underset{\sim}{T}_f$,为模糊综合评判决策提供了理论基础.

4.3.3 模糊综合评判决策的数学模型

模糊综合评判决策是对受多种因素影响的事物作出全面评价的一种十分有效的多因素决策方法,所以,模糊综合评判决策又称为模糊综合决策或模糊多元决策.

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为 n 种因素(或指标),$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 为 m 种评判,它

们的元素个数和名称均可根据实际问题需要由人们主观规定. 由于各种因素所处的地位不同,作用也不一样,当然权重也不同,因而评判也就不同. 人们对m 种评判并不是绝对地肯定或否定,因此综合评判应该是V 上的一个模糊子集

$$\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)\in\mathscr{F}(V).$$

其中b_j $(j=1,2,\cdots,m)$反映了第j 种评判v_j 在综合评判中所占的地位(即v_j 对模糊集$\underset{\sim}{B}$的隶属度,$\underset{\sim}{B}(v_j)=b_j$). 综合评判$\underset{\sim}{B}$依赖于各个因素的权重,它应该是$U$ 上的模糊子集$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathscr{F}(U)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$,其中a_i 表示第i 种因素的权重. 因此,一旦给定权重A,相应地可得到一个综合评判$\underset{\sim}{B}$.

于是,根据命题4.3.1与命题4.3.2,需要建立一个从U 到V 的模糊变换$\underset{\sim}{T}$. 如果对每一个因素u_i 单独作一个评判$\underset{\sim}{f}(u_i)$,就可以看作是U 到V 的模糊映射$\underset{\sim}{f}$,即

$$\underset{\sim}{f}:U\to\mathscr{F}(V),$$

$$u_i\mapsto\underset{\sim}{f}(u_i)\in\mathscr{F}(V).$$

由$\underset{\sim}{f}$ 可诱导出一个U 到V 的模糊线性变换$\underset{\sim}{T}_f$. 我们就可以把$\underset{\sim}{T}_f$ 看作是由权重A 得到的综合评判$\underset{\sim}{B}$的数学模型.

从以上分析可知,模糊综合决策的数学模型由三个要素组成,其步骤分为4步:

1° 因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$.

2° 评判集(评价集或决断集)$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$.

3° 单因素评判. $\underset{\sim}{f}:U\to\mathscr{F}(V)$,

$$u_i\mapsto\underset{\sim}{f}(u_i)=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in\mathscr{F}(V).$$

由命题4.3.1知,模糊映射$\underset{\sim}{f}$ 可诱导出模糊关系$\underset{\sim}{R}_f\in\mathscr{F}(U\times V)$,即

$$\underset{\sim}{R}_f(u_i,v_j)=\underset{\sim}{f}(u_i)(v_j)=r_{ij},$$

因此$\underset{\sim}{R}_f$ 可由模糊矩阵$\boldsymbol{R}\in\mu_{n\times m}$表示:

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{pmatrix},$$

称$\boldsymbol{R}$ 为单因素评判矩阵. 由命题4.3.2知,模糊关系$\underset{\sim}{R}$可诱导出U 到V 的模糊线性变换$\underset{\sim}{T}_f$.

称$(U,V,\boldsymbol{R})$构成一个模糊综合决策模型,$U,V,\boldsymbol{R}$ 是此模型的三个要素.

4° 综合评判. 对于权重$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,取max-min合成运算,即用模型$M(\wedge,\vee)$计算,可得综合评判

$$\underset{\sim}{B}=A\circ\boldsymbol{R}.\tag{4.10}$$

式(4.10)像一个转换器(图4.2).

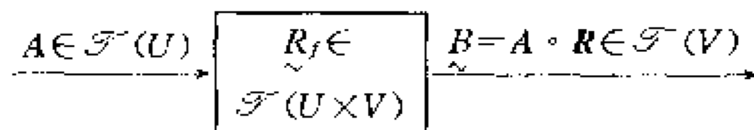


图4.2

若输入一种权重$A\in\mathscr{F}(U)$,则输出一个综合评判

$$\underset{\sim}{B}=A\circ R\in\mathscr{F}(V).$$

为了便于说明模糊综合决策的数学模型,下面举一个通俗的例子.

例4.3.6 服装评判 人们对服装的评价(喜欢的程度)是受花色、式样等多个因素影响,且往往又受人的主观因素影响,这就是俗语说的:"萝卜白菜,各有所爱."因此,选取了如下的因素集、评判集.

(1) 因素集$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,其中,u_1:花色;u_2:式样;u_3:耐穿程度;u_4:价格.

(2) 评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,其中,v_1:很欢迎;v_2:较欢迎;v_3:不太欢迎;v_4:不欢迎.

(3) 单因素评判.可以请若干专业人员与顾客,对于某种服装,单就花色表态,如果有20%的人很欢迎,50%的人较欢迎,20%的人不太欢迎,10%的人不欢迎,便可得到

$$u_1\mapsto(0.2,0.5,0.2,0.1).$$

类似地对其他因素进行单因素评判,得到一个从U到V的模糊映射,即

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{f}:U\to\mathscr{F}(V),\\&\quad u_1\mapsto(0.2,0.5,0.2,0.1),\\&\quad u_2\mapsto(0.7,0.2,0.1,0),\\&\quad u_3\mapsto(0,0.4,0.5,0.1),\\&\quad u_4\mapsto(0.2,0.3,0.5,0).\end{aligned}$$

由上述单因素评判,可诱导出模糊关系$\underset{\sim}{R}_f=R$,即得单因素评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix}0.2&0.5&0.2&0.1\\0.7&0.2&0.1&0\\0&0.4&0.5&0.1\\0.2&0.3&0.5&0\end{pmatrix}.$$

(4) 综合评判.不妨设有这样的两类顾客,他们对各因素所持的权重分别为

$$A_1=(0.1,0.2,0.3,0.4),\quad A_2=(0.4,0.35,0.15,0.1).$$

用模型$M(\wedge,\vee)$计算可求得这两类顾客对服装的综合评判为

$$\underset{\sim}{B}_1=A_1\circ R=(0.2,0.3,0.4,0.1),$$

$$\underset{\sim}{B}_2=A_2\circ R=(0.35,0.4,0.2,0.1).$$

按最大隶属原则，对此种服装第一类顾客不太欢迎，第二类顾客则比较欢迎.

如果需要的话，还可以对$\underset{\sim}{B}_2$进行归一化，得

$$\underset{\sim}{B}'_2=\left(\frac{0.35}{1.05},\frac{0.4}{1.05},\frac{0.2}{1.05},\frac{0.1}{1.05}\right)=(0.33,0.38,0.19,0.1),$$

此处

$$1.05=0.35+0.4+0.2+0.1.$$

例4.3.7 "晋升"的数学模型 对教师的评价更复杂一些，以高校教师晋升教授为例，选取主要因素.

(1) 因素集$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，其中，u_1：政治表现及工作态度；u_2：教学水平；u_3：科研水平；u_4：外语水平.

(2) 评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，其中，$v_1$：好；$v_2$：较好；$v_3$：一般；$v_4$：较差；$v_5$：差.

(3) 建立单因素评判矩阵.学科评审组的每个成员对被评判的对象进行评价.假定学科评审组由7人组成，用打分或投票的方法表明各自的评价.例如对张某的政治表现及工作态度，学科评审组中有4人认为好，2人认为较好，1人认为一般.对其他因素也作类似评价，其结果如表4.6所示.其中c_{ij} $(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4,5)$是赞成第i项因素u_i $(i=1,2,3,4)$为第j种评价v_j $(j=1,2,3,4,5)$的票数.

表4.6

因素集U	评判集V				
	v_1(好)	v_2(较好)	v_3(一般)	v_4(较差)	v_5(差)
u_1(政治表现及工作态度)	4(c_{11})	2(c_{12})	1(c_{13})	0(c_{14})	0(c_{15})
u_2(教学水平)	6(c_{21})	1(c_{22})	0(c_{23})	0(c_{24})	0(c_{25})
u_3(科研能力)	0(c_{31})	0(c_{32})	5(c_{33})	1(c_{34})	1(c_{35})
u_4(外语水平)	2(c_{41})	2(c_{42})	1(c_{43})	1(c_{44})	1(c_{45})

令

$$r_{ij}=\frac{c_{ij}}{\sum_{j=1}^{5}c_{ij}}\quad(i=1,2,3,4),\tag{4.11}$$

$\sum_{j=1}^{5}c_{ij}=7$为学科评审组的人数.由式(4.11)易得出单因素评判矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.57&0.29&0.14&0&0\\0.86&0.14&0&0&0\\0&0&0.71&0.14&0.14\\0.29&0.29&0.14&0.14&0.14\end{pmatrix}.$$

(4) 综合评判.由于高校有的教师是以教学为主，有的是以科研为主，所以对各个因素的侧重程度是不同的.下面给出两种不同侧重的权重：

以教学为主的教师,给出权重

$$A_1=(0.2,0.5,0.1,0.2),$$

以科研为主的教师,给出权重

$$A_2=(0.2,0.1,0.5,0.2).$$

用模型$M(\wedge,\vee)$计算得

$$\underset{\sim}{B}_1=A_1\circ R=(0.5,0.2,0.14,0.14,0.14),$$

$$\underset{\sim}{B}_2=A_2\circ R=(0.2,0.2,0.5,0.14,0.14).$$

将$\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2$归一化得

$$\underset{\sim}{B}_1'=(0.46,0.18,0.12,0.12,0.12),$$

$$\underset{\sim}{B}_2'=(0.17,0.17,0.42,0.12,0.12).$$

若规定获得评价“好”与“较好”要占50%以上才可晋升,则这位老师可以晋升为教学型教授,不可晋升为科研型教授.这与实际是相符的.

在对有些实际问题的处理中,为了充分利用综合评判带来的信息,可视评判结果所形成的向量为一权重(归一化),将评判集的等级用1分制数量化,则将评判结果进行加权平均,可得到总分.比如,“晋升”数学模型中,以教学为主的评判结果

$$\underset{\sim}{B}=(0.46,0.18,0.12,0.12,0.12),$$

评判集$V=\{v_1(好),v_2(较好),v_3(一般),v_4(较差),v_5(差)\}$,数量化表示为

$$V=(1,0.80,0.70,0.60,0.50)^{\mathrm{T}},$$

则得总分为

$$(0.46,0.18,0.12,0.12,0.12)\begin{pmatrix}1.00\\0.80\\0.70\\0.60\\0.50\end{pmatrix}=0.82\ (分).$$

如果规定总分在0.80分以上可以晋升,则该教师可以晋升高一级职称.一般地,评判结果$\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,可令

$$\delta_i=\frac{b_j^k}{\sum_{i=1}^{m}b_i^k},\quad j=1,2,\cdots,m.$$

这里k是选定的正实数(上述$k=1$),于是$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m)$构成一组权重.

例4.3.8　模糊综合评判在农业经营决策中的应用[12]　在农业生产过程中,实现同一目标往往有很多方案,通过对多种方案进行评价,对比选择,最后作出正确的决策,是农业经营管理中的一个重要研究课题.

某平原产粮区进行耕作制度改革,制定了甲(三种三收)、乙(两茬平作)、丙(二

年三熟)3个方案，主要评价指标有：粮食亩产量、农产品质量、每亩用工量、每亩纯收入和对生态平衡影响程度等共5项(1亩=(10000/15)m^2). 根据当地实际情况，这5个因素的权重分别定为0.2,0.1,0.15,0.3,0.25，其评价等级如表4.7所示.

表4.7

分数	评分项目				
	亩产量/kg	产品质量/级	亩用工量/(工·日)	亩纯收入/元	对生态平衡影响程度/级
5	550～600	1	20以下	130以上	1
4	500～550	2	20～30	110～130	2
3	450～500	3	30～40	90～110	3
2	400～450	4	40～50	70～90	4
1	350～400	5	50～60	50～70	5
0	350以下	6	60以上	50以下	6

经过典型调查，并应用各种参数进行试算预测，甲、乙、丙3种不同耕作制度改革方案的5项指标可达到表4.8中所列的数字.

表4.8

方案	甲	乙	丙
亩产量/kg	592.5	529	412
产品质量/级	3	2	1
亩用工量/(工·日)	55	38	32
亩纯收入/元	72	105	85
对生态平衡影响程度/级	5	3	2

(1) 设因素集$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，其中，$x_1$：亩产量；$x_2$：产品质量；$x_3$：亩用工量；$x_4$：亩纯收入；$x_5$：对生态平衡影响程度. 这5个因素的权重为

$$\boldsymbol{A}=(0.2,0.1,0.15,0.3,0.25).$$

(2) 评判集$V=\{v_1,v_2,v_3\}$，其中，v_1：甲种方案；v_2：乙种方案；v_3：丙种方案.

(3) 建立单因素评判矩阵. 因素与方案之间的关系可通过建立隶属函数，用模糊关系矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{5\times3}$表示.

由表4.7可看出，各因素的对应关系比较明显，在区间上为一线性函数.

亩产量的隶属函数为

$$\underset{\sim}{C}(x_1)=\begin{cases}0, & x_1\leqslant 350,\\ \dfrac{x_1-350}{600-350}, & 350<x_1<600,\\ 1, & x_1\geqslant 600;\end{cases}$$

产品质量的隶属函数为

$$\underset{\sim}{C}(x_2)=\begin{cases}1, & x_2\leqslant 1,\\ 1-\dfrac{x_2-1}{6-1}, & 1<x_2<6,\\ 0, & x_2\geqslant 6;\end{cases}$$

亩用工量的隶属函数为

$$\underset{\sim}{C}(x_3)=\begin{cases}1, & x_3\leqslant 20,\\ 1-\dfrac{x_3-20}{60-20}, & 20<x_3<60,\\ 0, & x_3\geqslant 60;\end{cases}$$

亩纯收入的隶属函数为

$$\underset{\sim}{C}(x_4)=\begin{cases}0, & x_1\leqslant 50,\\ \dfrac{x_4-50}{130-50}, & 50<x<130,\\ 1, & x\geqslant 130;\end{cases}$$

对生态平衡影响程度的隶属函数为

$$\underset{\sim}{C}(x_5)=\begin{cases}1, & x_5\leqslant 1,\\ 1-\dfrac{x_5-1}{6-1}, & 1<x_5<6,\\ 0, & x_5\geqslant 6.\end{cases}$$

将方案中调查预测的数据(表4.8)代入各隶属函数公式中,算出相应的隶属度.如果甲方案:亩产量为592.5kg,隶属度为

$$r_{11}=\underset{\sim}{C}(x_1)=\frac{592.5-350}{600-350}=0.97,$$

产品质量3级,则

$$r_{21}=\underset{\sim}{C}(x_2)=1-\frac{3-1}{6-1}=0.6,$$

亩用工量为55工·日,则

$$r_{31}=\underset{\sim}{C}(x_3)=1-\frac{55-20}{60-20}=0.125,$$

亩纯收入为72元,则

$$r_{41}=\underset{\sim}{C}(x_4)=\frac{72-50}{130-50}=0.275,$$

对生态平衡影响程度为5级,则

$$r_{51}=\underset{\sim}{C}(x_5)=1-\frac{5-1}{6-1}=0.2.$$

类似地,可算出乙种、丙种方案的各项指标的隶属度,得到单因素评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0.97 & 0.716 & 0.248\\ 0.6 & 0.8 & 1\\ 0.125 & 0.55 & 0.7\\ 0.275 & 0.6875 & 0.4375\\ 0.2 & 0.6 & 0.8\end{pmatrix}.$$

(4) 综合评判. 用模型 $M(\cdot,+)$ 计算得

$$\underset{\sim}{B}=A\cdot R=(0.405,0.662,0.586),$$

进行归一化处理,得 $\underset{\sim}{B}=(0.245,0.400,0.355)$.

$\underset{\sim}{B}$ 即是对方案的评判结果,按最大隶属原则知,其中乙方案最优,丙方案次之,甲方案较差.

4.3.4 模糊综合评判决策模型的改进

在模糊综合评判决策中,用的是max-min合成运算,即用模型 $M(\wedge,\vee)$ 计算 $\underset{\sim}{B}=A\circ R$,其中

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})\quad (j=1,2,\cdots,m).$$

前面曾经指出,算子 $(\wedge,\vee)$ 有很好的代数性质(1.3节),但是也存在着缺陷. 当需要考虑的因素很多又要求 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ 时,势必导致每个因素所分得的权重 a_i 很小,以至于 $a_i\leqslant r_{ij}$. 由于 $b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})$,于是丢掉了 $R=(r_{ij})$ 的许多信息,即

$$u_i\mapsto \underset{\sim}{f}(u_i)=\frac{r_{i1}}{v_1}+\frac{r_{i2}}{v_2}+\cdots+\frac{r_{im}}{v_m}=(r_{i1},r_{i2},,\cdots,r_{im}).$$

也就是说,人们对每个因素 u_i 所作的评判信息未得到充分利用. 因此,常常出现综合评判决策的结果不易分辨的情况.

例4.3.9 确定产品的级别 设某乡镇企业生产一种产品,其质量由9个指标 $u_1,u_2,\cdots,u_9$ 确定,产品的级别分为一级、二级、等外、废品4个等级. 于是因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$,评判集 $V=\{v_1(\text{一级}),v_2(\text{二级}),v_3(\text{等外}),v_4(\text{废品})\}$. 请有关专家、质量检查员、用户组成单因素评判(打分或投票)小组,得单因素评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27\\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23\\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12\\ 0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18\\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20\\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10\\ 0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20\\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11\\ 0.24 & 0.28 & 0.30 & 0.18\end{pmatrix}.$$

又设权重为

$$A=(0.1,0.12,0.07,0.07,0.16,0.1,0.1,0.1,0.18).$$

用模型$M(\wedge,\vee)$计算,得

$$\underset{\sim}{B}=A\circ R=(0.18,0.18,0.18,0.18).$$

结果无法分辨出产品的等级.这表明$M(\wedge,\vee)$有缺陷,需要改进.

下面介绍两种改进数学模型的方法,一是将原模型中的算子$(\wedge,\vee)$改用其他算子(1.3节),二是采用多层次模型.

1. 将模型$M(\wedge,\vee)$改用其他模型$M(\wedge^*,\vee^*)$

设模糊综合决策模型为$(U,V,\boldsymbol{R})$,对权重$\boldsymbol{A}\in\mathscr{T}(U)$,相应的综合评判$\underset{\sim}{B}=\boldsymbol{A}*\boldsymbol{R}$,其中

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m),\quad \boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m},$$

$$b_j \xlongequal{\text{def}} \bigvee_{i=1}^{n}{}^{*}(a_i\wedge^* r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

简记为$M(\wedge^*,\vee^*)$.

模型Ⅰ $M(\wedge,\vee)$——主因素决定型

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

由于综合评判的结果b_j的值仅由a_i与r_{ij} $(i=1,2,\cdots,n)$中的某一个确定(先取小、后取大运算),着眼点是考虑主要因素,其他因素对结果影响不大,这种运算有时出现决策结果不易分辨的情况.

模型Ⅱ $M(\cdot,\vee)$——主因素突出型

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\cdot r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

与模型$M(\wedge,\vee)$较接近,区别在于用$a_i\cdot r_{ij}$代替了$M(\vee,\wedge)$中的$a_i\wedge r_{ij}$.在模型$M(\cdot,\vee)$中,对r_{ij}乘以小于1的权重a_i,表明a_i是在考虑多因素时r_{ij}的修正值,与主要因素有关,忽略了次要因素.

模型Ⅲ $M(\wedge,\oplus)$——主因素突出型

$$b_j=\bigoplus_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})=\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

这里运算$\oplus$为有界和,即$a\oplus b=\min(1,a+b)$.由于权重分配满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\quad 0\leqslant a_i\leqslant 1,0\leqslant r_{ij}\leqslant 1,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})\leqslant 1.$$

故有

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})=\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij}).$$

在实际应用中,主因素(权重最大的因素)在综合评判中起主导作用时,建议采

用模型Ⅰ,当模型Ⅰ失效时可采用模型Ⅱ、Ⅲ.

模型Ⅳ $M(\cdot,+)$——加权平均模型

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot r_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

模型Ⅳ对所有因素依权重大小均衡兼顾,适用于考虑各因素起作用的情况.

例4.3.10 试用不同的模型分别计算例4.3.8中的综合评判:$\underset{\sim}{B}=A*R$.模型Ⅰ:$M(\wedge,\vee)$;模型Ⅱ:$M(\cdot,\wedge)$;模型Ⅲ:$M(\wedge,\oplus)$与模型Ⅳ:$M(\cdot,+)$.

(1) 用模型Ⅰ:$M(\wedge,\vee)$计算,得

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{5}(a_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,3),$$

所以 $$\underset{\sim}{B}=A*R=(0.275,0.3,0.3).$$

可知乙方案、丙方案的优劣分辨不出.

(2) 用模型Ⅱ:$M(\cdot,\vee)$计算,得

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{5}a_i\cdot r_{ij}\quad(j=1,2,3),$$

所以 $$\underset{\sim}{B}=A*R=(0.194,0.207,0.200).$$

可知乙方案优于丙方案优于甲方案,但3个方案之间的差异并不明显.

(3) 用模型Ⅲ:$M(\wedge,\oplus)$计算,得

$$b_j=\sum_{i=1}^{5}(a_i\wedge r_{ij})\quad(j=1,2,3),$$

所以 $$\underset{\sim}{B}=A*R=(0.9,1,1).$$

可知乙方案、丙方案的优劣分辨不出.

(4) 用模型Ⅳ:$M(\cdot,+)$计算,得

$$b_j=\sum_{i=1}^{5}a_ir_{ij}\quad(j=1,2,3),$$

所以 $$\underset{\sim}{B}=A*R=(0.245,0.400,0.355).$$

可知,乙方案优于丙方案优于甲方案.

例4.3.8中的综合评判就是用的模型$M(\cdot,+)$.比较了4个模型后,不难理解,当初例4.3.8为什么用这个模型来计算.

例4.3.11 利用模糊综合评判对20家制药厂经济效益的好坏进行排序[13]

制药厂经济效益的好坏受多个因素影响,这里只取主要因素.

(1) 设因素集$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为反映企业经济效益的主要指标.其中,x_1:总产值/消耗;x_2:净产值;x_3:盈利/资金占有;x_4:销售收入/成本.

(2) 评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{20}\}$为20家制药厂.20家制药厂的4项经济指标如表4.9所示.

表 4.9

制药厂	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1.611	10.59	0.69	1.67
2	1.429	9.44	0.61	1.50
3	1.447	5.97	0.24	1.25
4	1.572	10.78	0.75	1.71
5	1.483	10.99	0.75	1.44
6	1.371	6.46	0.41	1.31
7	1.665	10.51	0.53	1.52
8	1.403	6.11	0.17	1.32
9	2.620	21.51	1.40	2.59
10	2.033	24.15	1.80	1.89
11	2.015	26.86	1.93	2.02
12	1.501	9.74	0.87	1.48
13	1.578	14.52	1.12	1.47
14	1.735	14.64	1.21	1.91
15	1.453	12.88	0.87	1.52
16	1.765	17.94	0.89	1.40
17	1.532	29.42	2.52	1.80
18	1.488	9.23	0.81	1.45
19	2.586	16.07	0.82	1.83
20	1.992	21.63	1.01	1.89

(3) 建立单因素评判矩阵. 令

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{20} x_{ij}} \quad (i = 1,2,3,4; j = 1,2,\cdots,20),$$

则单因素评判矩阵$R=(r_{ij})_{4\times 20}$(见表 4.10),r_{ij}表示第j个制药厂的第i个因素的值在20家制药厂的同一因素值的总和中所占的比例.

比如,$r_{12} = \frac{x_{12}}{\sum_{j=1}^{20} x_{1j}}$,由表 4.9 知

$$x_{12} = 1.429, \quad \sum_{j=1}^{20} x_{1j} = 1.611 + 1.429 + \cdots + 1.992 = 34.279,$$

所以
$$r_{12} = \frac{1.429}{34.279} \approx 0.0417.$$

表 4.10

因素	序号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_{1j}	0.0470	0.0417	0.0422	0.0459	0.0433	0.0400	0.0486	0.0409	0.0764	0.0593
r_{2j}	0.0366	0.0326	0.0206	0.0372	0.0380	0.0223	0.0363	0.0211	0.0743	0.0834
r_{3j}	0.0356	0.0314	0.0124	0.0387	0.0387	0.0211	0.0273	0.0088	0.0722	0.0928
r_{4j}	0.0507	0.0455	0.0379	0.0519	0.0437	0.0398	0.0461	0.0401	0.0786	0.0574

因素	序号									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r_{1j}	0.0588	0.0438	0.0460	0.0506	0.0424	0.0515	0.0447	0.0434	0.0754	0.0581
r_{2j}	0.0928	0.0337	0.0502	0.0506	0.0445	0.0620	0.1016	0.0319	0.0555	0.0747
r_{3j}	0.0995	0.0448	0.0577	0.0624	0.0448	0.0459	0.1299	0.0416	0.0423	0.0521
r_{4j}	0.0613	0.0450	0.0446	0.0580	0.0461	0.0425	0.0546	0.0440	0.0555	0.0574

(4) 综合评判. 设各因素的权重为

$$\boldsymbol{A} = (0.15, 0.15, 0.20, 0.50).$$

1° 用模型 Ⅰ: $M(\cdot, \vee)$ 计算, 得

$$b_j = \bigvee_{i=1}^{4}(a_i \cdot r_{ij}),$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{B} &= \boldsymbol{A} * \boldsymbol{R} \\ &= (0.0253, 0.0227, 0.0190, 0.0259, 0.0218, 0.0199, 0.0231, \\ &\quad 0.0200, 0.0393, 0.0287, 0.0306, 0.0224, 0.0223, 0.0290, \\ &\quad 0.0231, 0.0212, 0.0273, 0.0220, 0.0278, 0.0287).\end{aligned}$$

按经济效益从好到差排列, 这 20 家药厂的排序为

9, 11, 14, 10, 20, 19, 17, 4, 1, 15, 7, 2, 12, 13, 18, 5, 16, 8, 6, 3.

2° 用模型 Ⅳ: $M(\cdot, +)$ 计算, 得

$$b_j = \sum_{i=1}^{4} a_i r_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, 20),$$

其排序稍有出入, 这是因为对于同一事物从不同的角度去观察分析, 其结果可能不同, 这也是符合实际的. 用模型 Ⅳ 得到的排序为

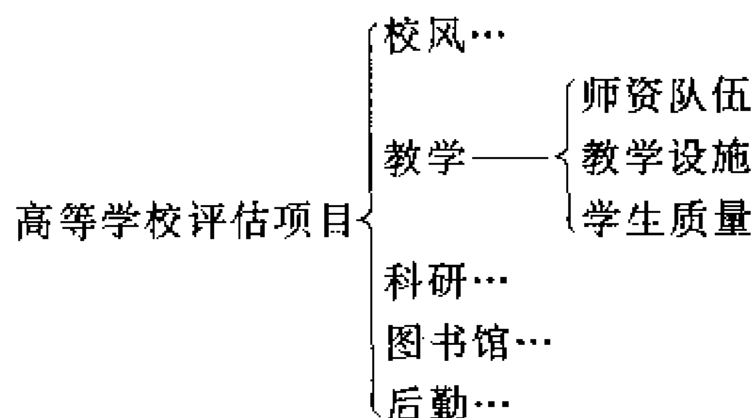
9, 17, 11, 10, 20, 14, 19, 13, 16, 4, 15, 1, 12, 5, 18, 7, 2, 6, 8, 3.

这里之所以不用模型 Ⅰ: $M(\wedge, \vee)$ $(b_j = \bigvee_{i=1}^{4}(a_i \wedge r_{ij}))$ 与模型 Ⅲ: $M(\wedge, \oplus)$ $(b_j = \sum_{i=1}^{4}(a_i \wedge r_{ij}))$, 是因为所有的 $a_i > r_{ij}$, 因此在作取小"∧"运算时, 因素的权重 a_i 根本不起作用, 只考虑了对因素的评判 r_{ij}. 这样作出的排序就不一定合理了.

从上述例题的讨论中我们看到了对实际问题是如何应用各种模型的，因此在模糊综合决策中一定要从实际出发选取模型.

2. 多层次模型

在实际问题中，遇到因素很多而权重分配又比较均衡的情况时，可采用多层次模型. 例如，对高等学校的评估就可分两个层次：



为节省篇幅，校风、科研、图书馆、后勤等各因素均未写出.

这里主要介绍两个层次的模型——二级模型.

建立二级模型的步骤如下.

第一步：将因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$分成若干组$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$，使得

$$U=\bigcup_{i=1}^{k}U_i,\quad U_i\cap U_j=\varnothing\quad(i\neq j).$$

称$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$为第一级因素集.

设
$$U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{n_i}^{(i)}\}\quad(i=1,2,\cdots,k),$$

其中
$$n_1+n_2+\cdots+n_k=\sum_{i=1}^{k}n_i=n$$

称为第二级因素集.

第二步：设评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，对第二级因素集$U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{n_i}^{(i)}\}$的$n_i$个因素进行单因素评判，即建立模糊映射

$$\underset{\sim}{f}_i:U_i\to\mathscr{T}(V),$$
$$u_1^{(i)}\mapsto\underset{\sim}{f}_i(u_1^{(i)})=(r_{11}^{(i)},r_{12}^{(i)},\cdots,r_{1m}^{(i)}),$$
$$u_2^{(i)}\mapsto\underset{\sim}{f}_i(u_2^{(i)})=(r_{21}^{(i)},r_{22}^{(i)},\cdots,r_{2m}^{(i)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n_i}^{(i)}\mapsto\underset{\sim}{f}_i(u_{n_i}^{(i)})=(r_{n_i1}^{(i)},r_{n_i2}^{(i)},\cdots,r_{n_im}^{(i)}).$$

得单因素评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)}\\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2m}^{(i)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_im}^{(i)}\end{bmatrix}_{n_i\times m}.$$

设$U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{n_i}^{(i)}\}$的权重为

$$A_i=(a_1^{(i)},a_2^{(i)},\cdots,a_{n_i}^{(i)}),$$

求得综合评判为

$$A_i\circ R_i=\underset{\sim}{B}_i\quad(i=1,2,\cdots,k).$$

第三步：对第一级因素集$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$作综合评判.设$U=\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$的权重为$A=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$，总评判矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B}_1\\\underset{\sim}{B}_2\\\vdots\\\underset{\sim}{B}_k\end{bmatrix},$$

按一级模型用算子$(\wedge,\vee)$计算，得综合评判为

$$A_{1\times k}\circ R_{k\times m}=\underset{\sim}{B}_{1\times m}\in\mathscr{T}(V).$$

二级模型也可用转换器表示(图4.3).

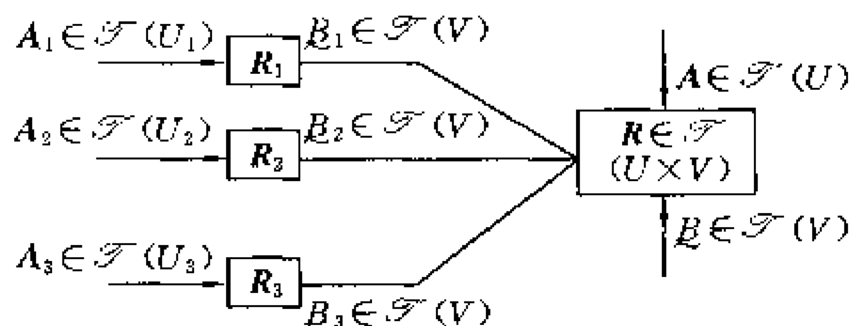


图4.3

例4.3.12 确定产品的级别 继续考虑例4.3.9提出的问题，某乡镇企业生产一种产品，它的质量由9个指标$u_1,u_2,\cdots,u_9$确定，产品的级别分为一级、二级、等外、废品.由于因素较多，权重分配较均衡，因此，宜采用二级模型.

(1) 将因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$分为3组，即

$$U_1=\{u_1,u_2,u_3\},\quad U_2=\{u_4,u_5,u_6\},\quad U_3=\{u_7,u_8,u_9\}.$$

(2) 设评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，v_1：一级；v_2：二级；v_3：等外；v_4：废品.

对每个$U_i\ (i=1,2,3)$中的因素进行单因素评判，可以请有关专家、质量检查员、用户组成评判小组，用打分或投票的办法(参见例4.3.7“晋升”的数学模型)得到相应的单因素评判矩阵.

对于第二级因素集$U_i\ (i=1,2,3)$，有：

$U_1=\{u_1,u_2,u_3\}$，权重$A_1=(0.3,0.42,0.28)$，单因素评判矩阵为

$$R_1=\begin{bmatrix}0.36&0.24&0.13&0.27\\0.20&0.32&0.25&0.23\\0.40&0.22&0.26&0.12\end{bmatrix},$$

作一级综合评判，用模型$M(\wedge,\vee)$计算，得

$$\underset{\sim}{B}_1 = A_1 \circ R_1 = (0.3, 0.32, 0.26, 0.27).$$

$U_2=\{u_4, u_5, u_6\}$,权重 $A_2=(0.2, 0.5, 0.3)$,单因素评判矩阵为

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18 \\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20 \\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10 \end{pmatrix},$$

作一级综合评判,得

$$\underset{\sim}{B}_2 = A_2 \circ R_2 = (0.26, 0.36, 0.2, 0.2).$$

$U_3=\{u_7, u_8, u_9\}$,权重 $A_3=(0.3, 0.3, 0.4)$,单因素评判矩阵为

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20 \\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11 \\ 0.4 & 0.28 & 0.30 & 0.18 \end{pmatrix},$$

作一级综合评判,得

$$\underset{\sim}{B}_3 = A_3 \circ R_3 = (0.3, 0.28, 0.3, 0.2).$$

(3) 对第一级因素集 $U=\{U_1, U_2, U_3\}$,设权重为

$$A=(0.2, 0.35, 0.45).$$

令总单因素评判矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{B}_1 \\ \underset{\sim}{B}_2 \\ \underset{\sim}{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.32 & 0.26 & 0.27 \\ 0.26 & 0.36 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.28 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix},$$

作二级综合评判,得

$$\underset{\sim}{B} = A \circ R = (0.3, 0.35, 0.3, 0.2).$$

按最大隶属原则,此产品属二级品.

4.4 权重的确定方法

在模糊综合决策中,权重是至关重要的,它反映了各个因素在综合决策过程中所占有的地位或所起的作用,直接影响到综合决策的结果.现在通常是凭经验给出权重.不可否认,这在一定程度上能反映实际情况,评判结果也比较符合实际.但是凭经验给出权重又往往带有主观性,有时不能客观地反映实际情况,评判结果可能“失真”.因此本节专门介绍权重的确定方法.

4.4.1 确定权重的统计方法

1. 专家估测法

设因素集 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$,现有 k 个专家各自独立地给出各因素 u_i $(i=1, 2, \cdots, n)$的权重,如表 4.11 所示.

表4.11

专家	因素						$\sum$
	u_1	u_2	…	u_i	…	u_n	
专家1	a_{11}	a_{21}	…	a_{i1}	…	a_{n1}	1
专家2	a_{12}	a_{22}	…	a_{i2}	…	a_{n2}	1
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
专家k	a_{1k}	a_{2k}	…	a_{ik}	…	a_{nk}	1
权重a_i $(i=1,2,\cdots,n)$	$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{1j}$	$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{2j}$	…	$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}$	…	$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{nj}$	1

根据表4.11,可取各因素权重的平均值作为其权重

$$a_i=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即

$$A=\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{1j},\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{2j},\cdots,\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_{nj}\right).$$

2. 加权统计方法

当专家人数$k<30$人时,可用加权统计方法来计算权重.

例4.4.1 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,请22位专家或有关人员根据权重分配调查表(表4.12)提出自己认为最合适的权重.收回此表后,再作权重的统计试验,其结果如表4.13所示.

表4.12

因素u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	$\sum$
权重a_{ij}					1

表4.13

序号i	u_1			u_2			u_3			u_4		
	x_i	N_i	ω_i	x_i	N_i	ω_i	x_i	N_i	ω_i	x_i	N_i	ω_i
1	0.15	1	0.0455	0.15	1	0.046	0.20	5	0.227	0.10	5	0.227
2	0.20	4	0.182	0.17	6	0.272	0.25	3	0.136	0.11	1	0.046
3	0.25	5	0.227	0.25	4	0.182	0.29	1	0.046	0.15	4	0.182
4	0.29	1	0.0455	0.29	1	0.046	0.30	7	0.318	0.20	8	0.364
5	0.30	9	0.409	0.30	7	0.318	0.35	4	0.182	0.30	3	0.136
6	0.35	1	0.0455	0.35	3	0.136	0.40	2	0.091	0.40	1	0.045
7	0.40	1	0.0455									
$\sum$		22	1.000		22	1.00		22	1.00		22	1.00

注 x_i—权数值; N_i—频数; ω_i—频率.

按公式$a_k=\sum_{i=1}^{s}\omega_i x_i$计算(其中$s$为序号数)得权重为

$$A=(0.270,0.255,0.288,0.187).$$

3. 频数统计方法

设因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,请有关专家或熟悉此项工作的具有丰富经验的人(不妨设由$k\geqslant 30$(人)组成),根据权重分配调研表(表4.14),对因素集U中的各个元素,各自独立地提出自己认为最合适的权重.

表 4.14

因素u_i	u_1	u_2	$\cdots$	u_n	$\sum$
权重a_{ij}					1

根据收回的权重分配调查表,对每个因素u_i $(i=1,2,\cdots,n)$进行单因素的权重统计试验,其步骤如下.

第一步:对因素u_i $(i=1,2,\cdots,n)$在它的权重a_{ij} $(j=1,2,\cdots,k)$中找出最大值M_i和最小值m_i,即

$$M_i=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\{a_{ij}\},\quad m_i=\min_{1\leqslant j\leqslant k}\{a_{ij}\}.$$

第二步:适当选取正整数p,利用公式$\dfrac{M_i-m_i}{p}$计算出把权重分成p组的组距,并将权重从小到大分成p组.

第三步:计算落在每组内权重的频数与频率.

第四步:根据频数与频率分布情况,一般取最大频率所在分组的组中值为因素u_i的权重a_i $(i=1,2,\cdots,n)$,从而得到权重为

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

例 4.4.2 以教学型教师晋升教授的问题为例来说明权重如何确定.

设因素集$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,其中,u_1:政治表现与工作态度;u_2:教学水平;u_3:科研能力;u_4:外语水平.

选定全系教师92人来统计,让他们写出自己认为最合适的权重分配.

因素u_1(政治表现与工作态度):最大值$M_1=0.5$,最小值$m_1=0.05$,选正整数$p=5$,组距$=\dfrac{0.5-0.05}{5}=0.09$,如表4.15所示.

表 4.15

分组	0.05～0.14	0.14～0.23	0.23～0.32	0.32～0.41	0.41～0.50
频数	7	33	40	10	2
频率	0.076	0.359	0.435(max)	0.109	0.021

因素u_2(教学水平):最大值$M_2=0.75$,最小值$m_2=0.25$,组距$=\dfrac{0.75-0.25}{5}=$

0.1,如表4.16所示.

表4.16

分组	0.25～0.35	0.35～0.45	0.45～0.55	0.55～0.65	0.65～0.75
频数	7	24	40	18	3
频率	0.076	0.261	0.435(max)	0.196	0.032

因素u_3(科研能力):最大值$M_3=0.25$,最小值$m_3=0$,组距$=\frac{0.25-0}{5}=0.05$,如表4.17所示.

表4.17

分组	0.00～0.05	0.05～0.10	0.10～0.15	0.15～0.20	0.20～0.25
频数	6	73	7	4	2
频率	0.065	0.793(max)	0.076	0.043	0.023

因素u_4(外语水平):最大值$M_4=0.47$,最小值$m_4=0.05$,组距$=\frac{0.47-0.05}{5}\approx$ 0.09,如表4.18所示.

表4.18

分组	0.05～0.14	0.14～0.23	0.23～0.32	0.32～0.41	0.41～0.50
频数	12	55	18	5	2
频率	0.130	0.598(max)	0.197	0.054	0.021

根据上述各表中的频数、频率的分布可知:一般可取频率最大的分组的组中值为相应因素u_i的权重a_i $(i=1,2,3,4)$,也可取组中值邻近的值.由此可确定权重为

$$\boldsymbol{A}=(0.235,0.465,0.100,0.200).$$

4.4.2 模糊协调决策法

模糊综合决策在实际应用中可分为正问题与逆问题.综合决策的正问题在4.3节已介绍过了,即:设因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,评判集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,单因素评判矩阵$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$,则对于给定的权重$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathscr{F}(U)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$,综合决策为

$$\underset{\sim}{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}\in\mathscr{F}(V). \tag{4.12}$$

综合决策的逆问题是指:在式(4.12)中,若已知综合决策$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(V)$,单因素评判矩阵$\boldsymbol{R}$,试问各因素的权重$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathscr{F}(U)$是什么.因此模糊综合决策的逆问题,从本质上讲是如何求权重的问题,也就是后面要讲到的求解模糊关系方程

$$X \circ R = \underset{\sim}{B} \tag{4.13}$$

的问题.

这里介绍一个求权重的近似处理方法——模糊协调决策法.

设有一组可供选择的权重方案

$$J = \{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$$

(注意,它们可能都不是模糊关系方程(4.13)的解,当然也不会是诱导出$\underset{\sim}{B}$的权重),称J为权重备择集.我们要从J中选择一种最佳的权重A_{i_0},使得由A_{i_0}所决定的综合决策$\underset{\sim}{B}_{i_0} = A_{i_0} \circ R$与$\underset{\sim}{B}$最贴近.这样的$A_{i_0}$就是最优决策方案,这种决策方法称为模糊协调决策法.

为此,按一级模型方法求出综合决策

$$\underset{\sim}{B}_1 = A_1 \circ R,$$

$$\underset{\sim}{B}_2 = A_2 \circ R,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{\sim}{B}_s = A_s \circ R.$$

根据贴近度与择近原则,若有i_0,使得

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_{i_0}, \underset{\sim}{B}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} \{\sigma(\underset{\sim}{B}_j, \underset{\sim}{B})\},$$

则认为A_{i_0}为J中的最佳权重.

例 4.4.3 某乡镇企业对产品质量作综合评判,考虑从4种因素来评价产品,即因素集$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,将产品质量分为4等,即评判集$V = \{\text{I}, \text{II}, \text{III}, \text{IV}\}$,设单因素评判的模糊映射

$$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V),$$

$$u_1 \to \underset{\sim}{f}(u_1) = (0.3, 0.6, 0.1, 0),$$

$$u_2 \to \underset{\sim}{f}(u_2) = (0, 0.2, 0.5, 0.3),$$

$$u_3 \to \underset{\sim}{f}(u_3) = (0.5, 0.3, 0.1, 0.1),$$

$$u_4 \to \underset{\sim}{f}(u_4) = (0.1, 0.3, 0.2, 0.4).$$

假设对产品的综合评判为

$$\underset{\sim}{B} = (0.2, 0.2, 0.4, 0.3).$$

(1) 试从下列4种对因素的权重分配方案中,选择最符合该评判的权重分配(按格贴近度计算):

$$A_1 = (0.3, 0.5, 0.1, 0.1), \quad A_2 = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1),$$

$$A_3 = (0.2, 0.3, 0.2, 0.3), \quad A_4 = (0.2, 0.4, 0.1, 0.3).$$

(2) 按贴近度公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]}$$

计算,试在上述权重分配方案中求出最佳权重.

解 由题知,单因素评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.3&0.6&0.1&0\\0&0.2&0.5&0.3\\0.5&0.3&0.1&0.1\\0.1&0.3&0.2&0.4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=\underset{\sim}{B}=(0.2,0.2,0.4,0.3).$$

用模糊协调决策法求权重 $\boldsymbol{A}$.

(1) 按一级模型作综合评判

$$\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{R}=(0.3,0.5,0.1,0.1)\circ\begin{pmatrix}0.3&0.6&0.1&0\\0&0.2&0.5&0.3\\0.5&0.3&0.1&0.1\\0.1&0.3&0.2&0.4\end{pmatrix},$$

$$=(0.3,0.3,0.5,0.3)=\underset{\sim}{B}_1,$$

$$\boldsymbol{A}_2\circ\boldsymbol{R}=(0.3,0.3,0.4,0.3)=\underset{\sim}{B}_2,$$

$$\boldsymbol{A}_3\circ\boldsymbol{R}=(0.2,0.3,0.3,0.3)=\underset{\sim}{B}_3,$$

$$\boldsymbol{A}_4\circ\boldsymbol{R}=(0.2,0.3,0.4,0.3)=\underset{\sim}{B}_4.$$

再按格贴近度公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}+(1-(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})]$$

计算,得

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.4+(1-0.3)]=0.55,$$

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.4+(1-0.3)]=0.55,$$

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_3,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.3+(1-0.2)]=0.55,$$

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_4,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{2}[0.4+(1-0.2)]=0.60.$$

按择近原则,最佳权重为

$$\boldsymbol{A}_4=(0.2,0.4,0.1,0.3).$$

(2) 按贴近度公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge \underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee \underset{\sim}{B}(x_k)]}$$

计算,得 $\sigma(\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B})=\frac{1.1}{1.4}=0.79,\quad \sigma(\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{B})=\frac{1.1}{1.3}=0.85,$

$$\sigma(\underset{\sim}{B}_3,\underset{\sim}{B})=\frac{1}{1.2}=0.83,\quad \sigma(\underset{\sim}{B}_4,\underset{\sim}{B})=\frac{1.1}{1.2}=0.92.$$

按择近原则,最佳权重为

$$A_4=(0.2,0.4,0.1,0.3).$$

用两种贴近度公式计算,所得结果是一致的,只是后一公式的分辨率高一些.

从上述例题看出,用模糊协调决策公式求权重分配尽管是一种近似方法,但由于运算简单,便于操作,比较有效,故科技工作者仍乐意使用它.

4.4.3 模糊关系方程法

前面曾经指出,求解模糊关系方程

$$\boldsymbol{X}_{1\times n}\circ \boldsymbol{R}_{n\times m}=\boldsymbol{B}_{1\times m}$$

的问题实质上是求权重分配,这也就是在此要介绍的用模糊关系方程法求权重分配的问题.模糊关系方程不仅可以用来求权重分配,而且在模糊数学的理论及其应用上占有十分重要的地位,为此,首先介绍所谓模糊关系方程,然后介绍模糊关系方程的解法.

为简单、直观起见,只讨论有限论域的情形.

我们知道,有限论域的模糊关系与模糊矩阵是等价的,并且总是用模糊矩阵表示模糊关系.

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\},\quad V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\},$

$$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_s\}.$$

若已知模糊矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}\in\mathscr{M}_{n\times s}$,要求满足

$$\boldsymbol{X}_{n\times m}\circ \boldsymbol{R}_{m\times s}=\boldsymbol{B}_{n\times s} \tag{4.14}$$

的未知模糊矩阵 $\boldsymbol{X}$;或者已知模糊矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{n\times m}$,$\boldsymbol{B}\in\mathscr{M}_{n\times s}$,要求满足

$$\boldsymbol{R}_{n\times m}\circ \boldsymbol{X}_{m\times s}=\boldsymbol{B}_{n\times s} \tag{4.15}$$

的未知模糊矩阵 $\boldsymbol{X}$.这里运算都是扎德算子($\wedge,\vee$).称形如式(4.14)与式(4.15)的方程为模糊关系方程.

若对式(4.15)的两边求转置,得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\circ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}, \tag{4.16}$$

则从方程的求解而言,式(4.16)与式(4.15)是一样的.正因为如此,以后只讨论式(4.14)这种模糊关系方程.

根据求权重分配的需要，进一步简化为仅讨论形如式(4.13)，即

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\circ\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{bmatrix}=(b_1,b_2,\cdots,b_m) \tag{4.17}$$

的模糊关系方程.

定义 4.4.1 称满足模糊关系方程 $X\circ R=B$ 的 X 为模糊关系方程的解. 若模糊关系方程 $X\circ R=B$ 有解，则称模糊关系方程是相容的. 若模糊关系方程的某个解 $\overline{X}$，对其他任何一个解 X 均有 $X\leqslant\overline{X}$，则称 $\overline{X}$ 为模糊关系方程的最大解.

根据扎德算子($\wedge,\vee$)的含义，模糊关系方程(4.17)又可写成

$$\left.\begin{aligned}&(x_1\wedge r_{11})\vee(x_2\wedge r_{21})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{n1})=b_1,\\&(x_1\wedge r_{12})\vee(x_2\wedge r_{22})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{n2})=b_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(x_1\wedge r_{1m})\vee(x_2\wedge r_{2m})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{mn})=b_m.\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

在式(4.18)中，这 m 个方程从本质上讲是一样的，因此，只要会解形如

$$(x_1\wedge a_1)\vee(x_2\wedge a_2)\vee\cdots\vee(x_n\wedge a_n)=b \tag{4.19}$$

的模糊关系方程就行了.

先讨论方程(4.19)有解的条件.

定理 4.4.1 模糊关系方程(4.19)有解的充要条件是 n 个模糊关系方程

$$x_1\wedge a_1=b,\ \cdots,\ x_i\wedge a_i=b,\ \cdots,\ x_n\wedge a_n=b \tag{4.20}$$

中至少有一个成立，且 n 个模糊不等式

$$x_1\wedge a_1\leqslant b,\ \cdots,\ x_i\wedge a_i\leqslant b,\ \cdots,\ x_n\wedge a_n\leqslant b \tag{4.21}$$

同时成立.

证 充分性 设至少有一个 x_i 满足 $x_i\wedge a_i=b$，且

$$x_1\wedge a_1\leqslant b,\ \cdots,\ x_i\wedge a_i\leqslant b,\ \cdots,x_n\wedge a_n\leqslant b,$$

所以，有

$$(x_1\wedge a_1)\vee\cdots\vee(x_i\wedge a_i)\vee\cdots\vee(x_n\wedge a_n)=b.$$

这就表明$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(4.19)的解.

必要性 设方程(4.19)有解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，即

$$(x_1\wedge a_1)\vee(x_2\wedge a_2)\vee\cdots\vee(x_n\wedge a_n)=b.$$

由于是取大"$\vee$"运算，所以其中至少有一项等于 b，不妨设

$$x_i\wedge a_i=b,$$

而其他各项

$$x_1\wedge a_1\leqslant b,\ \cdots,\ x_k\wedge a_k\leqslant b\ \ (k\neq i),\ \cdots,\ x_n\wedge a_n\leqslant b$$

同时成立. 否则,至少有某个 j,使得 $x_j \wedge a_j > b$,从而有

$$(x_1 \wedge a_1) \vee \cdots \vee (x_j \wedge a_j) \vee \cdots \vee (x_n \wedge a_n) > b,$$

这与已知条件矛盾. 定理得证.

由定理 4.4.1 的证明过程看出,求解方程(4.19)归结为求解方程(4.20)与不等式(4.21).

下面介绍模糊关系方程

$$x \wedge a = b \tag{4.22}$$

的解法——居卡莫特(Y. Tsukamoto)方法.

当 $a > b$ 时,方程(4.22)有唯一解 $x = b$;

当 $a = b$ 时,方程(4.22)有无穷多解 $x \geqslant b$,记为 $x = [b,1]$;

当 $a < b$ 时,方程(4.22)无解,记为 $x = \varnothing$.

为了使方程(4.22)的解表达简明,引进算符 ε,即

$$b\varepsilon a \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} b, & \text{当 } a > b \text{ 时}, \\ [b,1], & \text{当 } a = b \text{ 时}, \\ \varnothing, & \text{当 } a < b \text{ 时}. \end{cases} \tag{4.23}$$

于是,方程(4.22)的解为

$$x = b\varepsilon a. \tag{4.24}$$

再考虑所谓一元模糊线性不等式

$$x \wedge a \leqslant b, \tag{4.25}$$

当 $a > b$ 时,$x \leqslant b$,记为 $x = [0,b]$;

当 $a \leqslant b$ 时,$x = [0,1]$.

引进算符 $\hat{\varepsilon}$,即

$$b\hat{\varepsilon}a \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} [0,b], & \text{当 } a > b \text{ 时}, \\ [0,1], & \text{当 } a \leqslant b \text{ 时}. \end{cases} \tag{4.26}$$

模糊不等式(4.25)的解为

$$x = b\hat{\varepsilon}a. \tag{4.27}$$

由定理 4.4.1 可知,求解方程(4.19)$\Leftrightarrow$求解方程(4.20)和不等式(4.21). 现将方程(4.20)与不等式(4.21)的解用两个区间向量表示,记为

$$\boldsymbol{Y} \xlongequal{\text{def}} (b\varepsilon a_1, b\varepsilon a_2, \cdots, b\varepsilon a_n),$$

$$\hat{\boldsymbol{Y}} \xlongequal{\text{def}} (b\hat{\varepsilon}a_1, b\hat{\varepsilon}a_2, \cdots, b\hat{\varepsilon}a_n).$$

于是,由定理 4.4.1 又可知,方程(4.19)的每个解可以表达为

$$W^{(i)} = (b\hat{\varepsilon}a_1, \cdots, b\hat{\varepsilon}a_{i-1}, b\varepsilon a_i, b\hat{\varepsilon}a_{i+1}, \cdots, b\hat{\varepsilon}a_n),$$

其中 $$b\varepsilon a_i \neq \varnothing \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此，方程(4.19)的解集为

$$X = W^{(1)} \cup W^{(2)} \cup \cdots \cup W^{(n)}.$$

例4.4.4　解模糊关系方程

$$(x_1 \wedge 0.3) \vee (x_2 \wedge 0.5) \vee (x_3 \wedge 0.7) = 0.5.$$

解　先写出区间向量

$$Y = (0.5\varepsilon 0.3, 0.5\varepsilon 0.5, 0.5\varepsilon 0.7) = (\varnothing, [0.5,1], 0.5),$$

$$\hat{Y} = (0.5\hat{\varepsilon}\, 0.3, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.5, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.7) = ([0,1],[0,1],[0,0.5]).$$

因此

$$W^{(1)} = (0.5\varepsilon 0.3, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.5, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.7) = (\varnothing,[0,1],[0,0.5]) = \varnothing;$$

$$W^{(2)} = (0.5\hat{\varepsilon}\, 0.3, 0.5\varepsilon 0.5, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.7) = ([0,1],[0.5,1],[0,0.5]);$$

$$W^{(3)} = (0.5\hat{\varepsilon}\, 0.3, 0.5\hat{\varepsilon}\, 0.5, 0.5\varepsilon 0.7) = ([0,1],[0,1],0.5).$$

方程的解集为　　$x = W^{(2)} \cup W^{(3)}.$

最大解为　　$\bar{x} = (1,1,0.5).$

当然，我们也希望能直接求解模糊关系方程(4.17)或方程(4.13). 下面的定理给出了一个方法.

定理4.4.2　设模糊关系方程

$$\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B},$$

其中　$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，　$\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times m}$，　$\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$.

$\forall\, k\ (k=1,2,\cdots,n)$，令

$$\bar{x}_k = \bigwedge_{j=1}^{m} \{b_j \mid r_{kj} > b_j\}, \tag{4.28}$$

并约定 $\wedge \varnothing = 1$，则方程 $\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是

$$\overline{\boldsymbol{X}} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B},$$

其中 $\overline{\boldsymbol{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$，且 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 为最大解.

证　充分性　结论显然成立，因为 $\overline{\boldsymbol{X}} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ 表明 $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ 的解.

必要性　设 $\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，即

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \circ \boldsymbol{R} = (b_1, b_2, \cdots, b_m).$$

一方面，$\forall\, j$，有　　$\bigvee_{k=1}^{n} (x_k \wedge r_{kj}) = b_j,$

$\forall\, j,k$，有　　$(x_k \wedge r_{kj}) \leqslant b_j,$

$\forall\, j,k$，由式(4.26)，有

$$x_k \in \begin{cases} [0, b_j], & r_{kj} > b_j, \\ [0,1], & r_{kj} \leqslant b_j. \end{cases}$$

$\forall\, k$，有　　$x_k \leqslant \bigwedge_{j=1}^{n} \{b_j \mid r_{kj} > b_j\} = \bar{x}_k$

(当$r_{kj}\leqslant b_j$时,$0\leqslant x_k\leqslant 1$,而$\bar{x}_k=\wedge\{b_j|r_{kj}>b_j\}=\wedge\varnothing=1$,所以也有$x_k\leqslant\bar{x}_k$).
$\forall\, k$,$0\leqslant x_k\leqslant\bar{x}_k$,即

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n),\tag{4.29}$$

故

$$\boldsymbol{B}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\circ\boldsymbol{R}\leqslant(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\circ\boldsymbol{R}=\overline{\boldsymbol{X}}\circ\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{B}\leqslant\overline{\boldsymbol{X}}\circ\boldsymbol{R}.\tag{4.30}$$

另一方面,$\forall\, j,k$,有

当$r_{kj}>b_j$时 $\quad\bar{x}_k=\wedge\{b_j|r_{kj}>b_j\}\leqslant b_j,\quad \bar{x}_k\wedge r_{kj}\leqslant b_j\wedge r_{kj}=b_j$,

当$r_{kj}\leqslant b_j$时 $\quad\bar{x}_k=1,\quad \bar{x}_k\wedge r_{kj}\leqslant r_{kj}\leqslant b_j$.

因此,$\forall\, j,k$,总有

$$\bar{x}_k\wedge r_{kj}\leqslant b_j,\quad \bigvee_{k=1}^{n}(\bar{x}_k\wedge r_{kj})\leqslant b_j,$$

即

$$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\circ\boldsymbol{R}\leqslant(b_1,b_2,\cdots,b_m),$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}\circ\boldsymbol{R}\leqslant\boldsymbol{B}.\tag{4.31}$$

由式(4.30)与式(4.31),得

$$\overline{\boldsymbol{X}}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B},$$

且由式(4.29)知,$\overline{\boldsymbol{X}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$是最大解.

定理4.4.2给出了判别模糊关系方程是否有解的一种方法,若方程有解,则可求出其最大解.

例4.4.5 下列模糊关系方程是否有解?

(1) $(x_1,x_2,x_3)\circ\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.6 & 0.1\end{pmatrix}=(0.2,0.4,0.2)$;

(2) $(x_1,x_2)\circ\begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\ 1 & 0.2\end{pmatrix}=(0.7,0.3)$.

解 (1) 比较$\boldsymbol{R}$的第k行与$\boldsymbol{B}$,按式(4.28),有

$$\bar{x}_k=\bigwedge_{j=1}^{3}\{b_j|r_{kj}>b_j\},\quad k=1,2,3.$$

故 $\quad\bar{x}_1=\wedge\{0.2,0.4\}=0.2,\quad\bar{x}_2=\wedge\varnothing=1,\quad\bar{x}_3=\wedge\{0.4\}=0.4$,

得

$$(0.2,1,0.4)\circ\boldsymbol{R}=(0.2,0.4,0.2).$$

因此,方程是相容的,其最大解$\overline{\boldsymbol{X}}=(0.2,1,0.4)$.

(2) $\bar{x}_1=\wedge\varnothing=1$,$\bar{x}_2=\wedge\{0.7\}=0.7$. 仍记

$$\overline{\boldsymbol{X}}=(1,0.7),$$

但是

$$(1,0.7)\circ\begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\ 1 & 0.1\end{pmatrix}=(0.7,0.2)\neq(0.7,0.3),$$

因此方程不相容.

上面只是解决了一个模糊关系方程如果相容,则可求出它的最大解的问题. 至

于其他的解怎么求,情况要复杂一些.我们只给出结论(定理4.4.3),不予证明.

定理4.4.3 设模糊关系方程

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\circ \boldsymbol{R}=(b_1,b_2,\cdots,b_m), \tag{4.32}$$

其中$\boldsymbol{R}\in\mathscr{M}_{n\times m}$.令

$$G_j=\{k_j|k_j\in\{1,2,\cdots,n\},\bar{x}_{k_j}\wedge r_{k_jj}=b_j\}\quad(j=1,2,\cdots,m), \tag{4.33}$$

$$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_m.$$

又设$G\neq\varnothing$,$\forall\ g=(k_1,k_2,\cdots,k_m)\in G$,令

$$\boldsymbol{X}_g=(x_{g_1},x_{g_2},\cdots,x_{g_n}),$$

其中

$$x_{g_k}\overset{\text{def}}{=\!=}\bigvee_{j=1}^{m}\{b_j|k_j=k\},$$

则方程(4.32)相容的充要条件是$G\neq\varnothing$.此时全体解集合

$$\chi=\bigcup_{g\in G}\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{X}_g\leqslant\boldsymbol{X}\leqslant\overline{\boldsymbol{X}}\},$$

其中$\overline{X}$为最大解,称$\boldsymbol{X}_g$为对应$g\in G$的拟极小解.

下面用具体例子介绍一个由我国学者提出的实用方法——矩阵作业法.

例4.4.6 用矩阵作业法解模糊关系方程

$$(x_1,x_2,x_3)\circ\begin{pmatrix}0.7&0.5&0.4&0.6\\0.5&0.6&0.3&0.6\\0.6&0.7&0.4&0.8\end{pmatrix}=(0.5,0.6,0.4,0.6). \tag{4.34}$$

解 所给模糊关系方程简记为$\boldsymbol{X}_{1\times3}\circ\boldsymbol{R}_{3\times4}=\boldsymbol{B}_{1\times4}$.

第一步:求最大解.

将$\boldsymbol{B}$排到$\boldsymbol{R}$的上方,依次以$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{R}$的各行进行比较,分别按下列公式计算:

$$\bar{x}_k=\wedge\{b_j|b_j<r_{kj},j=1,2,\cdots,n\},$$

并约定$\wedge\varnothing=1$,称$\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$为方程的最大解.比如

$$\boldsymbol{B}=(0.5\quad 0.6\quad 0.4\quad 0.6),$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.7&0.5&0.4&0.6\\0.5&0.6&0.3&0.6\\0.6&0.7&0.4&0.8\end{pmatrix}.$$

$$\bar{x}_1=\wedge\{0.5\}=0.5,\quad \bar{x}_2=\wedge\{\varnothing\}=1,\quad \bar{x}_3=\wedge\{0.5,0.6,0.6\}=0.5.$$

最大解为

$$\bar{\boldsymbol{x}}=(0.5,1,0.5).$$

第二步:判断解的存在性.

首先,用b_j"平铣"$\boldsymbol{R}$的第j列:若$r_{kj}\geqslant b_j$,则用b_j代替r_{kj}.若$r_{kj}<b_j$,则用0代替r_{kj},$k=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$."平铣"后的矩阵记为$\boldsymbol{R}'$,并将最大解$\bar{x}$转置后竖列在$\boldsymbol{R}'$的右侧.

$$R' = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

其次,在R'中依行删去大于最大解的元素,即对第k行,若$r'_{kj} > \bar{x}_k$,则以0代替r'_{kj}, $k=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$. 所得矩阵记为

$$R'' = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.6 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程(4.34)有解的充要条件是R''中每一列都有非零元素. 方程(4.34)有解,则$\bar{x}$为最大解.

第三步:求极小解.

从第1列到第m列的每列任取一非零元素,对所有这些非零元素按行取最大值,并约定$\vee \varnothing = 0$. 所得一个模糊向量称为方程(4.34)的一个拟极小解. 对拟极小解$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若存在另一个拟极小解$x'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$,使$x' \leqslant x$,这表明$x$不是极小解. 从方程的全部拟极小解中删去非极小解,所剩的每一个向量都是极小解.

从R''中,每列任取一个非零元素,共有$3\times1\times2\times1=6$种取法,即

$$(1,2,1,2)\to(0.5,0.6,0), \quad (1,2,3,2)\to(0.5,0.6,0.4),$$
$$(2,2,1,2)\to(0.4,0.6,0), \quad (2,2,3,2)\to(0,0.6,0.4),$$
$$(3,2,1,2)\to(0.4,0.6,0.5), \quad (3,2,3,2)\to(0,0.6,0.5).$$

拟极小解为

$$x'=(0.4,0.6,0), \quad x''=(0,0.6,0.4).$$

第四步,构造解集.

最大解为 $\bar{x}=(0.5,1,0.5).$

拟最小解为

$$x'=(0.4,0.6,0), \quad x''=(0,0.6,0.4).$$

方程(4.34)的解为

$$X_1 = ([0.4,0.5],[0.6,1],[0,0.5]),$$
$$X_2 = ([0,0.5],[0.6,1],[0.4,0.5]),$$

即

$$(0.4,0.6,0)=x'\leqslant X_1\leqslant\bar{x}=(0.5,1,0.5),$$
$$(0,0.6,0.4)=x''\leqslant X_2\leqslant\bar{x}=(0.5,1,0.5).$$

方程(4.34)的解集为

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= X_1 \cup X_2 \\ &= ([0.4,0.5],[0.6,1],[0,0.5]) \cup ([0,0.5],[0.6,1],[0.4,0.5]).\end{aligned}$$

4.4.4 层次分析法

层次分析法(analytic hierarchy process，简称AHP)是美国运筹学家撒汀(T. L. Saaty)等人于20世纪70年代提出的对复杂问题作出决策的一种简明有效的新方法. 随着科学技术的发展,对以前在社会、经济、生物、心理、组织管理等领域只能定性描述的因素、事物和概念等,现在迫切需要作定量化的研究. 层次分析法把定性分析与定量分析相结合,在一定程度上满足了这种需要.

根据问题的总目标和决策方案分为三个层次:目标层G、准则层C和方案层P(图4.4),然后应用两两比较的方法确定决策方案的重要性,即得到决策方案P_1, $P_2,\cdots,P_n$相对于目标层G重要性的权重,从而获得比较满意的决策.

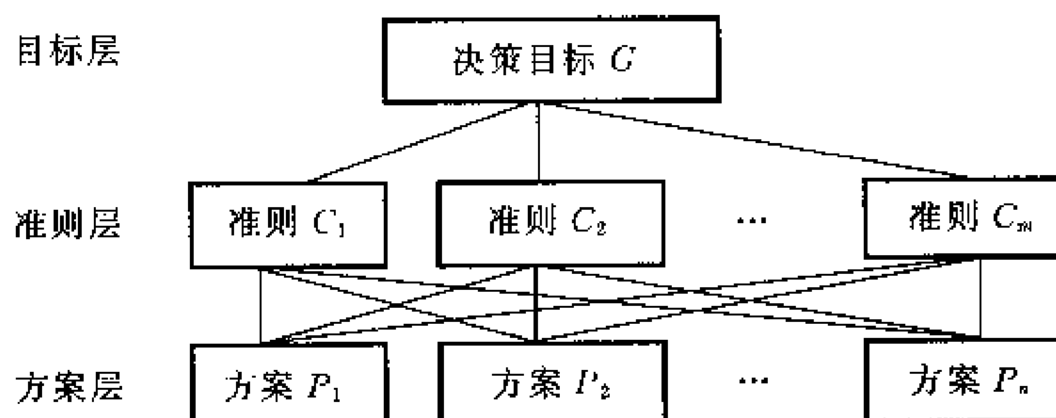


图4.4

层次分析法可分为以下四个步骤.

第一步:明确问题,建立层次结构.

首先要对问题有明确的认识,弄清问题范围、所包含的因素及其相互关系、解决问题的目的等,然后分析系统中各因素(决策方案)之间的关系，建立系统的递阶层次结构:目标层、准则层和方案层. 必要时,还可以建立子准则层.

第二步:构造判断矩阵.

对同一层次的各因素关于上一层中某一因素的重要性进行两两比较,构造判断矩阵. 例如,某一层次的各因素B_1, $B_2,\cdots,B_n$对上一层中某一因素A的相对重要性,用两两比较法得到判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中a_{ij}常取值如表4.19所示.

表4.19

B_i 比 B_j	相同	稍强	强	很强	绝对强	相同	稍弱	弱	很弱	绝对弱
a_{ij}	1	3	5	7	9	1	1/3	1/5	1/7	1/9

在相同到绝对强每两个等级之间可依次用2,4,6,8将其量化,即a_{ij}取1, 2,…,9或它们的倒数,因此判断矩阵又称正互反矩阵,并且满足

$$a_{ii}=1,\quad a_{ij}=1/a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

第三步:层次单排序及其一致性检验.

在构造判断矩阵 A 之后，求出判断矩阵 A 的最大(绝对值)特征值 $\lambda_{\max}$，再利用它对应的特征方程 $AW=\lambda_{\max}W$ 解出相应的特征向量 W，然后将其特征向量 W 归一化，即为同一层次的各因素相对于上一层中某一因素的重要性权重. 这一过程称为层次单排序.

然而，在构造判断矩阵进行两两对比判断时，由于客观事物的复杂性，我们的认识常常带有主观性和片面性. 例如，对三个因素 x_i, x_j, x_k 进行两两比较，由 x_i 与 x_j 相比得到 a_{ij}，由 x_j 与 x_k 相比得到 a_{jk}，再由 x_i 与 x_k 相比得到 a_{ik}，就可能出现 $a_{ij}a_{jk}\neq a_{ik}$. 因此，在构造判断矩阵 A 之后，还必须进行一致性检验.

可以证明以下两个结论：

1°正互反矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 是单根且是正实数，对应着正的特征向量.

2°n 阶正互反矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}\geqslant n$，$A$ 是一致的，即 A 满足

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n,$$

当且仅当 $\lambda_{\max}=n$.

用来衡量判断矩阵不一致程度的数量指标称为一致性指标，记为 C，定义为

$$C=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}.$$

当 $C=0$ 时，判断矩阵是一致的，C 的值越大，判断矩阵不一致程度越严重. 那么判断矩阵不一致程度在什么范围内，层次分析法仍然可以使用呢？为此，引入随机一致性指标

$$R=\frac{\bar{\lambda}_{\max}-n}{n-1}.$$

其中 $\bar{\lambda}_{\max}$ 为多个 n 阶随机正互反矩阵最大特征值的平均值. 当随机一致性比例 $C_R=C/R<0.1$ 时，A 的不一致性仍可接受，否则必须调整判断矩阵. 这个 0.1 是撒汀根据经验得到的. 随机一致性指标 R 的值，撒汀用了大小 500 个子样，对不同的 n 得到如表 4.20 所示的结果.

表 4.20

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

注意，任意的一阶、二阶判断矩阵是完全一致的.

判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的最大特征值相应的特征向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 的近似计算方法常用和法或根法.

1° 和法 先将判断矩阵 A 的每一列归一化，得到矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，然后按 B 的行求和，即

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中
$$b_{ij}=a_{ij}\Big/\sum_{k=1}^{n}a_{kj},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

2° **根法** 直接将判断矩阵 A 的每一行元素求积，然后开 n 次方，即

$$w_i=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}a_{ij}},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

无论是和法还是根法，作为权重，应再将 W 归一化. 判断矩阵 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 可由如下公式近似得到：

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(AW)_i}{w_i}.$$

其中 $(AW)_i$ 表示 AW 的第 i 个分量.

对于任意 n 阶方阵 X，其特征值与对应的特征向量MATLAB软件计算方法是

```
[Y,Z]=eig(X).
```

其中，方阵 Y 的 n 个列向量分别表示 X 的 n 个特征向量，方阵 Z 的对角线上的 n 个值分别表示 X 的 n 个特征值，顺序与特征向量一致.

第四步：层次总排序及其组合一致性检验.

计算方案层的各因素对于目标层的相对重要性权重，称为层次总排序. 这一过程是由最高层(目标层)到最底层(方案层)逐层进行的. 设某一层 A 包含 m 个因素 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，它们关于上一层中某一因素 G 的权重为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，其下一层 B 包含 n 个因素 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，它们关于 A_i 的权重为 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$，那么 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 关于 G 的权重为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，其中

$$c_j=\sum_{i=1}^{m}a_ib_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

层次总排序要进行组合一致性检验. 该过程也是由最高层(目标层)到最底层(方案层)逐层进行的. 设 B 层的 n 个因素 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 关于 A_i 的层次单排序一致性指标为 C_i，随机一致性指标为 R_i，那么 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 关于 G 的组合一致性指标为

$$C_R=\sum_{i=1}^{m}a_iC_i\Big/\sum_{i=1}^{m}a_iR_i.$$

类似地，当 $C_R<0.1$ 时，可认为层次总排序结果具有满意的一致性，否则需要重新调整判断矩阵.

例 4.4.7 利润分配 某企业现有一笔留存利润，可供选择的使用方案有：发奖金给职工，扩建集体福利设施，引进新技术新设备等. 为进一步促进企业发展，如何合理使用这笔利润？

解 (1) 建立层次结构，如图 4.5 所示，其中准则层是根据目标层和方案层制定的.

(2) 构造判断矩阵. 通过职工代表大会等构造准则层相对于目标层的重要性

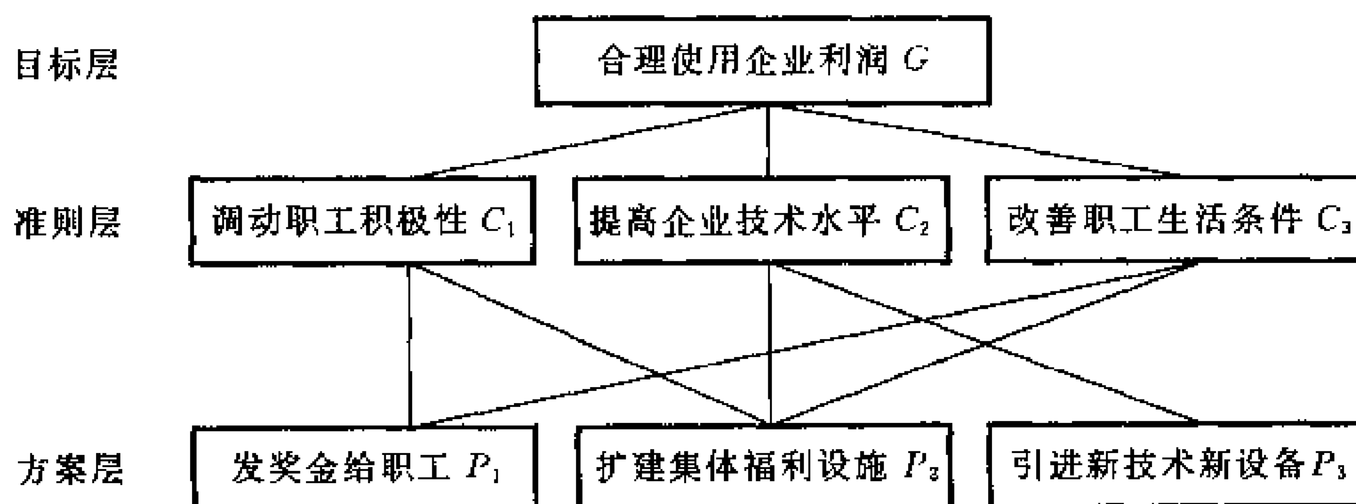


图 4.5

判断矩阵如下：

$$G=\begin{pmatrix}1 & 1/5 & 1/3\\ 5 & 1 & 3\\ 3 & 1/3 & 1\end{pmatrix}.$$

方案层中，P_1，P_2 相对于 C_1 的重要性判断矩阵为 $\boldsymbol{C}_1$；P_2，P_3 相对于 C_2 的重要性判断矩阵为 $\boldsymbol{C}_2$；P_1，P_2 相对于 C_3 的重要性判断矩阵为 $\boldsymbol{C}_3$.

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1/3 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}1 & 1/5\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 层次单排序及其一致性检验. 判断矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的最大特征值相应的特征向量 $\boldsymbol{W}$ 用和法计算过程如下：

$$\begin{pmatrix}1 & 1/5 & 1/3\\ 5 & 1 & 3\\ 3 & 1/3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{每一列归一化}}\begin{pmatrix}1/9 & 3/23 & 1/13\\ 5/9 & 15/23 & 9/13\\ 3/9 & 5/23 & 3/13\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行和}}\begin{pmatrix}857/2691\\ 5113/2691\\ 2103/2691\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{归一化}}\begin{pmatrix}0.106\\ 0.634\\ 0.260\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{W}=(0.106,\ 0.634,\ 0.260)^{\mathrm{T}}$. 判断矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的最大特征值

$$\lambda_{\max}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{AW})_i}{nw_i}=\frac{1}{3}\left(\frac{0.319}{0.106}+\frac{1.944}{0.634}+\frac{0.789}{0.260}\right)=3.04,$$

一致性指标
$$C=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{3.04-3}{3-1}=0.02.$$

由于随机一致性比例 $C_R=C/R=0.02/0.58=0.034<0.1$，因此可认为调动职工积极性、提高企业技术水平、改善职工生活条件关于合理使用企业利润的权重为 $(0.106,\ 0.634,\ 0.260)$.

判断矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}=2$，相应的特征向量 $\boldsymbol{W}=(0.75,\ 0.25)^{\mathrm{T}}$，$C=0$，$C_R=0<0.1$，即发奖金给职工、扩建集体福利设施、引进新技术新设备关于调动职

工积极性的权重为(0.75, 0.25, 0).

判断矩阵C_2的最大特征值$\lambda_{max}=2$,相应的特征向量$W=(0.167, 0.833)^T$,$C=0$,$C_R=0<0.1$,即发奖金给职工、扩建集体福利设施、引进新技术新设备关于提高企业技术水平的权重为(0, 0.167, 0.833).

判断矩阵C_3的最大特征值$\lambda_{max}=2$,相应的特征向量$W=(0.667, 0.333)^T$,$C=0$,$C_R=0<0.1$,即发奖金给职工、扩建集体福利设施、引进新技术新设备关于改善职工生活条件的权重为(0.667, 0.333, 0).

(4) 层次总排序及其组合一致性检验.层次总排序为

$$(0.106,\ 0.634,\ 0.260)\begin{pmatrix}0.75 & 0.25 & 0\\ 0 & 0.167 & 0.833\\ 0.667 & 0.333 & 0\end{pmatrix}=(0.253,\ 0.219,\ 0.528),$$

层次总排序组合一致性检验

$$C=0.106\times0+0.634\times0+0.260\times0=0,\quad C_R=0<0.1,$$

即发奖金给职工、扩建集体福利设施、引进新技术新设备关于合理使用企业利润的权重为(0.253, 0.219, 0.528),或者说企业利润分配比例为:引进新技术新设备占52.8%,发奖金给职工占25.3%,扩建集体福利设施占21.9%.

在实际问题中,判断矩阵可能残缺某些数据.处理方法是:对给定的残缺判断矩阵A^*,将所有空缺项记为零,再将具有k $(k\geqslant1)$个空缺项的行(列)的对角线元素记为$k+1$,得到新矩阵A,A称为A^*的等价判断矩阵.例如若

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & \times & 1/7 & \times\\ 1/3 & 1 & 1/7 & 1/9 & 1/5\\ \times & 7 & 1 & \times & 3\\ 7 & 9 & \times & 1 & 5\\ \times & 5 & 1/3 & 1/5 & 1\end{pmatrix},$$

则A^*的等价判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & 1/7 & 0\\ 1/3 & 1 & 1/7 & 1/9 & 1/5\\ 0 & 7 & 3 & 0 & 3\\ 7 & 9 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 1/3 & 1/5 & 2\end{pmatrix}.$$

然后求出A的最大特征值及其对应的特征向量,归一化后就是所求的权重向量.

4.5 模糊决策的应用

模糊决策有着广泛的应用.下面仅举若干例子说明模糊决策与模糊关系方程

在科学技术与经济管理等方面的应用.

例 4.5.1 花卉适宜栽培地的模糊相似优先比决策[34] 由于花卉本身的特性和栽培地生境条件的模糊性,引入模糊相似优先比选择花卉的适宜栽培地,可以避免选择引种栽培地点的盲目性,提高引种成功的可能性和花卉栽培的经济、社会效益.

金丝蝴蝶是在北京市郊山区有野生分布的一种宿根花卉,花为金黄色,花期 6~7 个月,观赏价值极高.现以金丝蝴蝶为例说明如何选择花卉的适宜栽培地.

(1) 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 为被选择的栽培地,其中,x_1:北京紫竹院公园;x_2:北京林业大学花圃;x_3:北京园林科研所花圃;x_4:北京植物园.金丝蝴蝶的典型生境作为进行比较的固定样地.

通过采用多元统计方法,确定限制金丝蝴蝶分布的主要因素是,x_{i1}:群落乔木郁闭度;x_{i2}:年平均气温;x_{i3}:土壤 pH 值.这些原始数据如表 4.21 所示.

表 4.21

地　点	因　子		
	群落乔木郁闭度/%	年平均气温/℃	土壤 pH 值
北京紫竹院公园	65	11.6	8.10
北京林业大学花圃	0	11.6	8.28
北京园林科研所花圃	85	12.4	8.30
北京植物园	0	11.8	7.80
金丝蝴蝶典型生境	0	1.2	6.40

将原始数据归一化,令

$$x'_{ik}=\frac{x_{ik}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{x_{ik}\}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{x_{ik}\}-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\{x_{ik}\}}\quad (i=1,2,3,4,5;\quad k=1,2,3),$$

$x'_{ik}\in[0,1]$,得到数据归一化的结果(表 4.22).

表 4.22

地　点	因　子		
	群落乔木郁闭度/%	年平均气温/℃	土壤 pH 值
北京紫竹院公园	0.76	0.93	0.89
北京林业大学花圃	0	0.93	0.99
北京园林科研所花圃	1	1	1
北京植物园	0	0.95	0.74
金丝蝴蝶典型生境	0	0	0

(2) 确定模糊相似优先比 r_{ij}，建立模糊优先比矩阵.

用欧几里得距离计算被选样地 x_i 与固定样地 x_5 之间的距离，即

$$d_{i5}=\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}(x'_{ik}-x'_{5k})^2}\quad(i=1,2,3,4),$$

经计算得，4 个被选择地与固定样地之间的距离分别为

$$d_{15}=0.86,\quad d_{25}=0.78,\quad d_{35}=1,\quad d_{45}=0.70.$$

以 (d_{i5},d_{j5}) 构成二元比较级，令

$$r_{ij}=\frac{d_{j5}}{d_{i5}+d_{j5}},\quad r_{ij}+r_{ji}=1,$$

取 $r_{ii}=1$，得模糊相似优先比矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.48 & 0.54 & 0.45\\ 0.52 & 1 & 0.56 & 0.47\\ 0.46 & 0.44 & 1 & 0.41\\ 0.55 & 0.53 & 0.59 & 1\end{pmatrix}.$$

(3) 在模糊优先比矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中由大至小取 λ-截矩阵，评出相似程度，首先达到全行为 1 的那一行所属样本与金丝蝴蝶典型生境最为相似，即为第一优越对象. 其他类似地进行下去.

取 $\lambda=0.53$，得
$$\boldsymbol{R}_{0.53}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

故第 4 行北京植物园为第一优越对象. 划去 $\boldsymbol{R}$ 中的第 4 行、第 4 列，得

$$\boldsymbol{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0.48 & 0.54\\ 0.52 & 1 & 0.56\\ 0.46 & 0.44 & 1\end{pmatrix},$$

取 $\lambda=0.52$，得
$$\boldsymbol{R}^{(1)}_{0.52}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

故第 2 行北京林业大学花圃为第二优越对象. 再划去 $\boldsymbol{R}^{(1)}$ 中的第 2 行、第 2 列，得

$$\boldsymbol{R}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0.54\\ 0.46 & 1\end{pmatrix},$$

取 $\lambda=0.54$，得
$$\boldsymbol{R}^{(2)}_{0.54}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则第 1 行北京紫竹院公园为第三优越对象.

因此，金丝蝴蝶适宜栽培地按适宜程度由大到小排序为

北京植物园,北京林业大学花圃,北京紫竹院公园,北京园林科研所花圃.

例 4.5.2 图书选题的模糊综合评判[15] 图书出版之前要进行选题论证,主要是了解社会需求情况、掌握有关专业学科动态和有关出版物的信息、熟悉作者情况、进行选题论证及决策等. 目前,大部分出版社都采用"编辑论证"和"集体决策"相结合的选题论证方法,但是在集体决策过程中,容易受到每个决策成员的经验、心理、个人偏好和人际关系等主观因素的影响. 这里采用以定性定量为特征的选题论证方法——模糊综合评判. 设论证选题 P.

(1) 因素集 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9\}$={政治性,科学性,价值性,需求性,可行性,创新性,特色性,效益性,优化性},即用 9 种因素描述选题的优劣.

(2) 评判集 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$={很好,好,中,差,很差}.

(3) 单因素评判. 成立 10 人组成的专家评判组,成员为出版社主管领导、有关业务部门(出版、印刷、发行、信息)与选题有关的作者等. 就选题 P 的名称、篇幅、读者对象、发行出版方式、编著者情况、选题的特点、同类读物的出版情况、发行数量的估计等发表意见,如表 4.23 所示.

表 4.23

因素集	权 重(满分 100 分)	评 判 集				
		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1						
u_2						
⋮						
u_9						

以 u_1(政治性)为例,10 位专家的意见为:5 位专家评为 v_1(很好),4 位专家评为 v_2(好),1 位专家评为 v_3(中),其他没有发表意见. 于是,这就得到一个模糊映射

$$u_1 \mapsto \left(\frac{5}{10},\frac{4}{10},\frac{1}{10},0,0\right)=(0.5,0.4,0.1,0,0).$$

其他因素作类似统计,得单因素评判矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 综合评判. 由于每个因素 u_i ($i=1,2,\cdots,9$)对选题的影响程度是不同的，用专家估测法，在专家评判各个因素的同时，让专家对各个因素进行权重打分(满分100分)，记入表4.23的第2列. 比如某专家对9个因素的权重评分为100,95,85,90,95,70,60,80,80，那么10位专家对权重的评分共有10组数据，将此10组数据按各因素的数据算出平均值. 例如算出的各因素的平均值为99,90,86,95,96,80,82,90,65，其总和为783，再归一化处理，得

$$a_1=\frac{99}{783}=0.126,\ a_2=\frac{90}{783}=0.115,\ \cdots,\ a_9=\frac{65}{783}=0.083,$$

即9个因素的权重为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)\\&=(0.126,0.115,0.110,0.121,0.123,0.102,0.105,0.115,0.083).\end{aligned}$$

再用模型 $M(\cdot,+)$作综合评判，得

$$\underset{\sim}{B}=\boldsymbol{A}_{1\times 9}\circ \boldsymbol{R}_{9\times 5}=(0.523,0.310,0.156,0.012,0).$$

综合9个因素考虑，根据最大隶属原则，选题 P 应评为很好.

例4.5.3 综合评判悬铃木在天津市种植的适应度[16] 悬铃木(英桐)是世界上著名的城市绿化树种，在我国有一百多年栽培历史，集中分布于黄河以南诸省. 现运用模糊综合评判原理，探讨在天津市区气候、土壤条件下种植的悬铃木的适应度.

(1) 因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$，其中，

u_1:年均温度 $\overline{T}$， u_2:年10 ℃以上积温 T_1，

u_3:年绝对最低温度 $T_{\min}$， u_4:年降水量 P_{re}，

u_5:年相对湿度 R_H， u_6:年日照时数 B_S，

u_7:年均风速 $\overline{v_W}$， u_8:土壤酸碱度(pH值)，

u_9:土壤中有害盐类含量 H_S.

(2) 评判集

$$V=\{v_1(\text{很适宜}),v_2(\text{适宜}),v_3(\text{临界}),v_4(\text{不适宜}),v_5(\text{很不适宜})\}.$$

根据悬铃木在原产地和国内主要分布的气候、土壤状况，它在 $\overline{T}=15$ ℃，$T_1=4750$ ℃，$T_{\min}<-17.7$ ℃，$P_{re}=1000$ mm，$R_H=75\%$，$B_S=2159.2$ h，$\overline{v_W}=3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，pH=6.5，$H_S=0.0$ 的条件下生长最为理想，故将其作为计算模糊关系矩阵的基准值，综合评判在天津市区种植的适应度.

(3) 单因素评判矩阵.

先建立 U 中诸因素 u_i ($i=1,2,\cdots,9$)的隶属函数

$$\mu(u_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a(u_i-c)^b}, & \text{当 } x<c \text{ 时}(a>0,b>0),\\ 1, & \text{当 } x\geqslant c \text{ 时}, i=1,2,\cdots,9.\end{cases}$$

其中，c=基准值，a 和 b 为参数. 这里 $b=2$，$a_{\overline{T}}=0.3299$，$a_{T_1}=0.1698$，$a_{T_{\min}}=$

0.0707, $a_{P_{re}}=0.1008$, $a_{R_H}=0.1188$, $a_{B_S}=0.3195$, $a_{\bar{v}_w}=0.1439$, $a_{pH}=0.0822$, $a_{H_S}=0.1616$.

由上述计算得9个因素的隶属度如表4.24所示.

表4.24

年度	因素								
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
1951	0.72	0.88	1.00	0.42	0.41	1.00	—	0.40	0.75
1952	0.64	0.99	1.00	0.36	0.24	1.00	—	0.40	0.75
1953	0.70	0.82	1.00	0.78	0.30	1.00	—	0.40	0.75
1954	0.56	0.86	1.00	0.91	0.30	1.00	—	0.40	0.75
1955	0.54	0.44	1.00	0.69	0.41	1.00	—	0.40	0.75
1956	0.37	0.57	1.00	0.67	0.45	1.00	—	0.40	0.75
1957	0.64	0.44	1.00	0.44	0.37	1.00	—	0.40	0.75
1958	0.56	0.42	1.00	0.40	0.30	1.00	—	0.40	0.75
1959	0.64	0.99	1.00	0.58	0.37	1.00	—	0.40	0.75
1960	0.58	0.67	1.00	0.53	0.33	1.00	—	0.40	0.75
1961	0.76	0.96	1.00	0.66	0.37	1.00	1.00	0.40	0.75
1962	0.62	0.77	1.00	0.48	0.27	1.00	0.99	0.40	0.75
1963	0.64	0.82	1.00	0.59	0.27	1.00	0.99	0.40	0.75
1964	0.51	0.61	1.00	0.93	0.82	1.00	1.00	0.40	0.75
1965	0.64	0.64	1.00	0.42	0.22	1.00	1.00	0.40	0.75
1966	0.51	0.54	0.77	0.79	0.30	1.00	1.00	0.40	0.75
1967	0.52	0.71	1.00	0.50	0.24	1.00	0.99	0.40	0.75
1968	0.60	0.91	1.00	0.32	0.22	1.00	0.99	0.40	0.75
1969	0.37	0.58	1.00	0.78	0.37	1.00	0.99	0.40	0.75
1970	0.84	0.58	1.00	0.57	0.33	1.00	1.00	0.40	0.75

根据计算的隶属度(共20年)规定:

当$\mu(u)<0.60$时为很不适宜, 当$0.60\leqslant\mu(u)<0.70$时为不适宜,

当$0.70\leqslant\mu(u)<0.80$时为临界, 当$0.80\leqslant\mu(u)<0.90$时为适宜,

当$\mu(u)\geqslant0.90$时为很适宜.

于是从单因素评判入手,例如,对因素u_1,样本为20个,按上述评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$的规定,可以算出$\mu(u)\geqslant0.9$者为0,$0.8\leqslant\mu(u)<0.9$者为1,$0.7\leqslant\mu(u)<0.8$者为3,$0.6\leqslant\mu(u)<0.7$者为7,$\mu(u)<0.6$者为9,所以有

$$u_1\mapsto\left(\frac{0}{20},\frac{1}{20},\frac{3}{20},\frac{7}{20},\frac{9}{20}\right)=(0,0.05,0.15,0.35,0.45).$$

类似地对其他因素进行评判，得单因素评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0 & 0.05 & 0.15 & 0.35 & 0.45\\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.15 & 0.35\\ 0.95 & 0 & 0.05 & 0 & 0\\ 0.10 & 0 & 0.15 & 0.15 & 0.60\\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.95\\ 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00\\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(4) 综合评判. 参照悬铃木树干解析数据，作主干年生长量与诸因素的相关分析，$r_{u_1}=-0.364$，$r_{u_2}=-0.256$，$r_{u_4}=0.251$，$r_{u_5}=0.340$，$r_{u_6}=-0.317$，$r_{u_7}=0.186$；另外，对 u_3,u_8,u_9 三个因素的估计为 $r_{u_3}=1.000$，$r_{u_8}=0.165$，$r_{u_9}=0.500$. 经归一化处理，得 9 个因素的权重为

$$A=(0.11,0.08,0.30,0.07,0.10,0.09,0.05,0.05,0.15).$$

利用模型 $M(\wedge,\vee)$ 计算，得

$$\underset{\sim}{B}=A\circ R=(0.30,0.08,0.15,0.11,0.11).$$

作归一化处理，得

$$\underset{\sim}{B}=(0.400,0.107,0.200,0.147,0.147).$$

结果表明：由于“很适宜”栽种与“适宜”栽种的百分比仅为50.7%，所以在天津市内普遍种植悬铃木，成功与失败的可能性几乎相当，这种情况下一般称这种树种为“边缘树种”. 因此，悬铃木不能作为天津市区的主要绿化树种，但可作为配合树种适当发展.

例 4.5.4 C 公司企业核心竞争力模糊评价模型的建立与优化[17] 企业的核心竞争力是由企业的操作层到企业最高管理层，资源与能力逐层累积而成的一种企业综合能力. 企业核心竞争力是由多个因素确定的，而企业的发展战略则要靠企业的核心竞争力支撑. 为了建立评价模型，建议由公司最高管理层人员 7 人和专家 3 人组成评估小组.

(1) 确定评判因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{15}\}$，由于因素多，所以应用二级模型. 所谓二级模型，实际上就是两个一级模型.

第一级因素集：

$U=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}=$ {品牌优势，人力资源，系统管理，成本优势}.

第二级因素集：

$U_1=$ {品牌吸引力，市场竞争力，市场执行能力}，

$U_2=$ {人力资源开发，培训发展，团队合作}，

$U_3=\{\text{TCCQS},\text{TPL},\text{KMS},\text{IS}\}=\{$C公司质量系统,第三方物流,知识管理系统,信息系统$\}$,

$U_4=\{$生产效率,设备维护效率,物料使用效率,原辅料/成品管理,成本管理$\}$.

(2) 确定判断集. 将企业核心竞争力强弱划分为5个等级,即

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}=\{\text{强,较强,一般,较弱,弱}\}.$$

(3) 由10人评估小组先对第二级因素中的每一因素进行单因素评判,如对因素集$U_1=\{$品牌吸引力,市场竞争力,市场执行能力$\}$中的3个因素进行核心竞争力相对强弱的评判,评估小组投票结果如表4.25所示.

表4.25

	v_1(强)	v_2(较强)	v_3(一般)	v_4(较弱)	v_5(弱)
u_1(品牌吸引力)	8	2	0	0	0
u_2(市场竞争力)	7	2	1	0	0
u_3(市场执行能力)	6	2	1	1	0

这实际上是对第二级因素U_1的3个因素进行单因素评判,即建立模糊映射,得单因素评判矩阵$\boldsymbol{R}_1=(r_{ij})=\frac{1}{10}(c_{ij})$ $(i=1,2,3;j=1,2,\cdots,5)$,其中c_{ij}是对u_i评价为v_j的票数.

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0\end{pmatrix}_{3\times5}.$$

类似地,可得到其他3个因素集U_2,U_3,U_4的单因素评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}_{3\times5},\quad \boldsymbol{R}_3=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0\end{pmatrix}_{4\times5},$$

$$\boldsymbol{R}_4=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\end{pmatrix}_{5\times5}.$$

(4) 对第二级因素集作综合评判. 先用加权统计法由10人评估小组对第二级因素中的每一因素给予权重评估. 仍以因素集U_1为例,对U_1中的3个因素进行相对重要程度的评估,预先设定的权重等级间隔为0.05,每位专家投票时3个因素所分配的权重和为1,投票结果如表4.26所示. 其中,x_i:预设权重,N_i:投票人数,ω_i:

频率,因素 u_k 的权重为

$$a_k=\sum_{i=1}^{5}x_i\omega_i \quad (k=1,2,3).$$

表 4.26

序号	品牌吸引力				市场竞争力				市场执行能力			
	x_i	N_i	ω_i	$x_i\cdot\omega_i$	x_i	N_i	ω_i	$x_i\cdot\omega_i$	x_i	N_i	ω_i	$x_i\cdot\omega_i$
1	0.30	2	0.2	0.060	0.30	4	0.4	0.120	0.20	4	0.4	0.080
2	0.35	1	0.1	0.035	0.35	3	0.3	0.105	0.25	3	0.3	0.075
3	0.40	3	0.3	0.120	0.40	2	0.2	0.080	0.30	2	0.2	0.060
4	0.45	3	0.3	0.135	0.45	1	0.1	0.045	0.35	1	0.1	0.035
5	0.50	1	0.1	0.050		—				—		
$\sum$		10	1	0.40		10	1	0.35		10	1	0.25

由表 4.26 可知,U_1 中的 3 个因素的权重为 $\boldsymbol{A}_1=(0.40,0.35,0.25)$. 类似地可得 U_2,U_3,U_4 的权重为

$$\boldsymbol{A}_2=(0.35,0.35,0.30),\quad \boldsymbol{A}_3=(0.2,0.3,0.2,0.3),$$

$$\boldsymbol{A}_4=(0.25,0.15,0.15,0.20,0.25).$$

再对第二级因素集作综合评判. 用模型 $M(\cdot,+)$ 计算,得

$$\boldsymbol{A}_i\circ\boldsymbol{R}_i=\underset{\sim}{B}_i \quad (i=1,2,3,4).$$

$$\underset{\sim}{B}_1=(0.72,0.20,0.06,0.03,0.00),\quad \underset{\sim}{B}_2=(0.57,0.20,0.17,0.03,0.03),$$

$$\underset{\sim}{B}_3=(0.58,0.20,0.11,0.11,0.00),\quad \underset{\sim}{B}_4=(0.69,0.20,0.12,0.00,0.00).$$

(5) 对第一级因素集

$$U=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}=\{\text{品牌优势,人力资源,系统管理,成本优势}\}$$

作综合评判. 用相同的方法得出 $U=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ 的权重为

$$\boldsymbol{A}=(0.30,0.26,0.24,0).$$

总评判矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是以 $\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\underset{\sim}{B}_3,\underset{\sim}{B}_4$ 为行的模糊矩阵,即

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B}_1\\ \underset{\sim}{B}_2\\ \underset{\sim}{B}_3\\ \underset{\sim}{B}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.72 & 0.20 & 0.06 & 0.03 & 0\\ 0.57 & 0.20 & 0.17 & 0.03 & 0.03\\ 0.58 & 0.20 & 0.11 & 0.11 & 0\\ 0.69 & 0.20 & 0.12 & 0 & 0\end{bmatrix}_{4\times 5}.$$

作综合评判,有

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=\underset{\sim}{B}=(0.64,0.20,0.11,0.04,0.01).$$

根据最大隶属原则可以得出企业拥有强的核心竞争力的结论. 核心竞争力的主要动力来源由大到小的排序为:品牌优势,人力资源,系统管理,成本优势.

例4.5.5　人参生成的环境因素分析　根据现有研究成果和参农的生产经验，确定人参生长发育的主要环境因素为$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$，其中，$u_1$：0 ℃以上持续日数；$u_2$：10 ℃以上活动积温；$u_3$：年降水量；$u_4$：干燥度；$u_5$：积雪日数；$u_6$：土壤酸碱度(pH 值)；$u_7$：土壤腐殖质含量.

人参生长环境划分为5个等级，即评判集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，其中，$v_1$：一等；$v_2$：二等；$v_3$：三等；$v_4$：四等；$v_5$：五等(不宜种植).

对U中7个因素的单因素评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.4 & 0.3 & 0.15 & 0.1 & 0.05\\ 0.35 & 0.3 & 0.3 & 0.05 & 0\end{bmatrix}.$$

已知综合评判为$\underset{\sim}{B}=(0.35,0.5,0.1,0.05,0)$(这个评判结果是根据多年产参的实际质量统计而得到的).

对于7个因素，提出可能的待选择的权重为

$$\boldsymbol{A}_1=(0.10,0.13,0.20,0.20,0.13,0.14,0.10),$$

$$\boldsymbol{A}_2=(0.20,0.20,0.10,0.10,0.10,0.10,0.20),$$

$$\boldsymbol{A}_3=(0.25,0.25,0.05,0.05,0.30,0.05,0.05).$$

应用模糊协调决策法，求权重分配.由于因素较多，权重分配差异不大，所以采用模型$M(\cdot,+)$作出综合评判，有

$$\underset{\sim}{B}_1=\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{R}=(0.245,0.25,0.366,0.132,0.007),$$

$$\underset{\sim}{B}_2=\boldsymbol{A}_2\circ\boldsymbol{R}=(0.27,0.26,0.345,0.12,0.005),$$

$$\underset{\sim}{B}_3=\boldsymbol{A}_3\circ\boldsymbol{R}=(0.2925,0.265,0.3375,0.1025,0.0025).$$

再用贴近度公式

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\underset{\sim}{A}(x_k)-\underset{\sim}{B}(x_k)|$$

分别计算$\underset{\sim}{B}_i$ $(i=1,2,3)$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度，得

$$\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B}_1)=0.858,\quad \sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B}_2)=0.872,\quad \sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B}_3)=0.8834.$$

根据择近原则，由于$\sigma(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{B}_3)$为最大，故$\boldsymbol{A}_3$是最佳权重分配.

建议读者用其他贴近度公式计算一下，并加以比较.

例4.5.6　模糊关系方程在土壤侵蚀预报中的应用[18]　目前土壤侵蚀预报主要有两种方法：一种是利用美国学者提出的通用流失预报方程，另一种是通过建立

回归方程式进行侵蚀量预报.这两种方法都是将侵蚀因子与侵蚀量的关系看作精确的数量关系.但事实上,土壤的侵蚀是非常复杂的过程,涉及面广,影响因子多,侵蚀因子的不同强度之间、不同侵蚀程度的侵蚀量之间存在着明显的模糊关系.

(1) 土壤侵蚀预报的数学模型为

$$y=(a_1\wedge x_1)\vee(a_2\wedge x_2)\vee(a_3\wedge x_3)\vee(a_4\wedge x_4). \tag{4.35}$$

其中,y 是侵蚀量隶属函数值;x_1:土壤物理性粘粒所决定的侵蚀因子;x_2:土壤有机质所决定的侵蚀因子;x_3:土壤团粒水稳性所决定的侵蚀因子;x_4:地面坡度所决定的侵蚀因子.a_1,a_2,a_3,a_4 为待定系数.

从模型(4.35)容易看出,构造这一模型的基本思想是:各侵蚀因子中影响最大的一项因子对侵蚀量起了决定作用,而待定系数 a_i 又对该因子的影响效果作了限制和校正.显然这一模型是近似的,同时又是非常简便的.

(2) 各侵蚀因子值与实测参数的关系.

关系方程(4.35)中各侵蚀因子 x_1,x_2,x_3,x_4 是[0,1]上的数值,为了得到各侵蚀因子值与实测参数的关系,通过大量实际资料,建立如下的隶属函数.

土壤物理性粘粒质量分数 x_1(%):

$$x_1=\begin{cases}1, & X_1\leqslant 10,\\ \dfrac{1}{1+[0.036(X_1-10)]^{3.756}}, & X_1>10;\end{cases}$$

土壤有机质质量分数 x_2(%):

$$x_2=\begin{cases}1, & X_2<1,\\ \mathrm{e}^{-0.072X_2^2}, & X_2\geqslant 1;\end{cases}$$

土壤团粒水稳性 x_3(水稳性指数 k 值,%):

$$x_3=\frac{100-X_3}{100};$$

地面坡度 x_4(°):

$$x_4=\begin{cases}0, & X_4<10,\\ 0.0003X_4^{2.198}, & 10\leqslant X_4\leqslant 40,\\ 1, & X_4>40.\end{cases}$$

其中 X_i $(i=1,2,3,4)$ 为实测参数.

表4.27给出了不同侵蚀类型各侵蚀因子实测值和相应的 x_i 的值.

(3) 用模糊关系方程(4.35)作预报.

a) 在模型(4.35)中,a_1,a_2,a_3,a_4 是待定的,x_1,x_2,x_3,x_4 可通过实测数据由上述4个公式算出.由于在实测条件下各相应的 y 值为已知,所以根据表4.27提供的数据,可通过解模糊关系方程来确定 a_1,a_2,a_3,a_4.即解如下模糊关系方程:

表 4.27

侵蚀类型	观测点编号	土壤侵蚀量		土壤物理性粘粒质量分数/%		土壤有机质质量分数/%		土壤团粒水稳性指数 k 值/%		地面坡度/(°)	
		Y		(1)		(2)		(3)		(4)	
		Y	y	X_1	x_1	X_2	x_2	X_3	x_3	X_4	x_4
轻度侵蚀类型Ⅰ	C_7	2500		34.99	0.60	4.21	0.28	75	0.25	32	0.61
	C_9	2000		47.18	0.25	5.49	0.11	80	0.20	35	0.74
	C_{10}	1500		55.55	0.14	6.81	0.04	85	0.15	33	0.65
	C_{24}	2000		33.29	0.66	4.54	0.23	80	0.20	34	0.70
	C_{25}	2500		39.41	0.45	4.11	0.30	80	0.20	36	0.79
	合计	10500		210.42	2.10	25.16	0.96	400	1.00	170	3.49
	平均	2100	0.21	42.08	0.42	5.03	0.19	80	0.20	34	0.70
中度侵蚀类型Ⅱ	C_{11}	3000		43.54	0.33	1.82	0.79	90	0.10	15	0.12
	C_{12}	4000		24.53	0.92	0.62	1.00	80	0.20	3	0
	C_{13}	3500		47.70	0.24	0.86	1.00	75	0.25	10	0
	C_{14}	3000		54.49	0.15	0.88	1.00	90	0.10	15	0.12
	C_{15}	4500		32.44	0.69	0.96	1.00	60	0.40	15	0.12
	C_{16}	3500		41.08	0.40	0.97	1.00	85	0.15	20	0.22
	C_{22}	3000		28.68	0.82	0.91	1.00	75	0.25	20	0.22
	合计	24500		272.46	3.55	7.02	6.79	555	1.45	98	0.80
	平均	3500	0.35	38.92	0.51	1.00	0.97	80	0.21	14	0.11
强度侵蚀类型Ⅲ	C_1	7000		54.99	0.14	0.57	1.00	30	0.70	25	0.36
	C_2	6000		10.17	1.00	0.88	1.00	40	0.60	25	0.36
	C_3	6000		1.00	1.00	0.27	1.00	35	0.65	20	0.22
	C_{20}	7000		22.23	0.96	0.97	1.00	35	0.65	30	0.53
	L_4	6000		12.10	1.00	0.49	1.00	35	0.65	30	0.53
	L_{10}	7000		26.50	0.88	1.11	0.92	35	0.65	20	0.22
	合计	39000		126.99	4.98	4.29	5.92	210	3.90	150	2.22
	平均	6500	0.65	21.17	0.83	0.72	0.99	35	0.65	25	0.37

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)\circ\begin{pmatrix}0.42 & 0.51 & 0.83\\0.19 & 0.97 & 0.99\\0.20 & 0.21 & 0.65\\0.70 & 0.11 & 0.37\end{pmatrix}=(0.21,0.35,0.65).$$

利用矩阵作业法容易求得

$$a_1=0.21,\quad a_2=0.35,\quad a_3=(0.65,1),\quad a_4=(0,0.21).$$

于是模型(4.35)为

$$y=(0.21\wedge x_1)\vee(0.35\wedge x_2)\vee((0.65,1)\wedge x_3)\vee((0,0.21)\wedge x_4).$$

b) 预报.已知观测点C_4的各侵蚀因子的实测值,并经由上述4个公式计算相应的x_i值(表4.28).

表4.28

	1	2	3	4
X_i	47.8	0.30	40	20
x_i	0.24	1	0.60	0.22

于是得出

$$\begin{aligned}y&=(0.21\wedge 0.24)\vee(0.35\wedge 1)\vee((0.65,1)\wedge 0.60)\vee((0,0.21)\wedge 0.22)\\&=0.21\vee 0.35\vee 0.60\vee(0,0.21)=0.60.\end{aligned}$$

由于表4.27中侵蚀类型及其相应的Y值分别是:Ⅰ级,$Y\leqslant 2500$;Ⅱ级,$2500<Y<5000$;Ⅲ级,$Y\geqslant 5000$.

相应的y值依下式计算

$$y=\begin{cases}1, & Y\geqslant 10000,\\ \dfrac{Y}{10000}, & Y<10000.\end{cases}$$

可见,观测点C_4属Ⅲ级强度侵蚀类型.

习 题 4

1. **排序** 某单位按下列条件(现实表现、管理水平、教学水平、教学奖、荣誉证、科研水平、科研奖、论文数)对6位同志晋升高一级职称的条件进行评判.由于各人情况不同,名额又有限,拟请专家8人对6位同志a,b,c,d,e,f进行排序,所得结果如表4.29所示.试用模糊意见集中决策,确定6位同志的先后次序.

表4.29

意见	名次					
	1(10分)	2(8分)	3(6分)	4(4分)	5(2分)	6(1分)
m_1	b	a	d	c	f	e
m_2	b	e	f	a	d	c
m_3	e	d	f	c	a	b
m_4	e	d	c	f	b	a
m_5	d	e	c	f	b	a
m_6	c	d	f	a	b	e
m_7	f	d	a	c	b	e
m_8	d	c	f	a	e	b

2. 排序 手写英文字母 a,b,c 的模糊识别. 设论域 $X=\{a,b,c\}$ 及待识别图像 (z) 如图 4.6 所示，为了方便，设 a,b,c 依次为 x_1，x_2，x_3. 考察它们与待识别图像 (z) 是否相似.

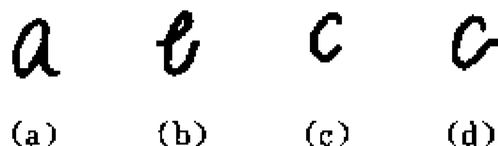


图 4.6

若 a 与 b 比较，a 与 (z) 相似程度为0.32，则 b 与 (z) 相似程度为0.46；b 与 c 比较，b 与 (z) 相似程度为0.4，则 c 与 (z) 相似程度为0.64；c 与 a 比较，c 与 (z) 相似程度为0.46，则 a 与 (z) 相似程度为0.54. 试用模糊优先关系定序法按与图像 (z) 最相似特性确定 x_1,x_2,x_3 的次序，从而识别 (z) 是哪个字母.

3. 设
$$X=\{x_1,x_2,x_3\},\quad Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\},$$
$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad A=\{x_1,x_3\},\quad \underset{\sim}{B}=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.2}{x_2},$$
试求 $\underset{\sim}{T}_R(A)$，$\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})$.

4. 设
$$X=\{x_1,x_2\},\quad Y=\{y_1,y_2,y_3\},$$
$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.7\\0.3&1&0.1\end{pmatrix},\quad A=\{x_1,x_2\},\quad \underset{\sim}{B}=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.6}{x_2},$$
试求 $\underset{\sim}{T}_R(A)$，$\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})$.

5. 设
$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\},\quad Y=\{a,b,c,d\},$$
而
$$f(x)=\begin{cases}a, & x\in\{x_1,x_2,x_3\},\\ b, & x\in\{x_4,x_5\},\\ c, & x=x_6,\end{cases}$$
$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.4}{x_5}+\frac{0.7}{x_6},$$
试求 $\underset{\sim}{B}=f(\underset{\sim}{A})$ 及 $f^{-1}(\underset{\sim}{B})$.

6. 设
$$X=R,$$
$$f:R\to R,$$
$$x\mapsto f(x)=1+(x+1)^2,$$
而
$$\underset{\sim}{A}=\mathscr{T}(X),$$
$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}1+x/3, & -3<x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
试求 $f(\underset{\sim}{A})$.

7. 对某产品质量作综合评判，考虑从 4 种因素来评判产品，即因素集为
$$U=(u_1,u_2,u_3,u_4),$$

将产品质量分为4等，即评判集为$V=\{Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ\}$，设单因素评判为模糊映射$\underset{\sim}{f}:X\to\mathscr{F}(V)$，

$$u_1 \mapsto \underset{\sim}{f}(u_1)=(0.3,0.6,0.1,0),$$
$$u_1 \mapsto \underset{\sim}{f}(u_2)=(0,0.2,0.5,0.3),$$
$$u_1 \mapsto \underset{\sim}{f}(u_3)=(0.5,0.3,0.1,0.1),$$
$$u_1 \mapsto \underset{\sim}{f}(u_4)=(0.1,0.3,0.2,0.4).$$

设有两种对因素的权重为

$$\boldsymbol{A}_1=(0.5,0.2,0.2,0.1),\quad \boldsymbol{A}_2=(0.2,0.4,0.1,0.3).$$

试评判此产品按两种权重情况下，分别相对地属于哪级产品.

8. 在习题7中，若对产品所得综合评判为

$$\boldsymbol{B}=(0.2,0.2,0.4,0.3),$$

(1) 试从下列4种对因素的权重方案中，选择最符合作该评判的权重(按格贴近度计算).

$$\boldsymbol{A}_1=(0.3,0.5,0.1,0.1),\quad \boldsymbol{A}_2=(0.3,0.4,0.2,0.1),$$
$$\boldsymbol{A}_3=(0.2,0.3,0.2,0.3),\quad \boldsymbol{A}_4=(0.2,0.4,0.1,0.3).$$

在这次综合评判中，试分析哪种因素起决定作用.

(2) 若贴近度采用以下定义：

$$\sigma(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\wedge\underset{\sim}{B}(x_k)]}{\sum_{k=1}^{n}[\underset{\sim}{A}(x_k)\vee\underset{\sim}{B}(x_k)]},$$

试在题(1)的4种对因素的权重方案中，选择最符合作该评判的权重.

9. 综合评判 在对华南某些地区种植橡胶的适宜程度的综合评判中，取$U=\{$年平均气温，年极端最低气温，年平均风速$\}$，$V=\{$很适宜，较适宜，适宜，不适宜$\}$. 根据1960—1978年间的历史资料，对南宁地区得单因素评判$\underset{\sim}{f}:U\to\mathscr{F}(Y)$，

南宁年平均气温$\mapsto(0.42,0.58,0,0)$，

南宁年极端最低气温$\mapsto(0,0,0.26,0.74)$，

南宁年平均风速$\mapsto(0,0.11,0.26,0.63)$.

又对万宁地区得单因素评判矩阵

$$\boldsymbol{R}_{万宁}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.95 & 0.05 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

如果着眼权重为$\boldsymbol{A}=(0.19,0.80,0.01)$，那么，试分别对南宁、万宁两地区作一综合评判.

10. 综合评判 在教学过程的综合评判中，取$U=\{$清楚易懂，教材熟练，生

动有趣,板书整齐清楚),$V=\{$很好,较好,一般,不好$\}$.设某班学生对教师的教学评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.1 & 0\\ 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix},$$

若考虑权重$\boldsymbol{A}=(0.5,0.2,0.2,0.1)$,试求学生对这位教师的综合评判.

11. 解下列模糊关系方程:

(1) $(x_1\wedge 0.7)\vee(x_2\wedge 0.8)\vee(x_3\wedge 0.6)\vee(x_4\wedge 0.3)=0.6$;

(2) $(x_1\wedge 0.6)\vee(x_2\wedge 0.7)\vee(x_3\wedge 0.5)\vee(x_4\wedge 0.8)\vee(x_5\wedge 0.3)=0.6$;

(3) $(x_1,x_2,x_3,x_4)\circ\begin{pmatrix}0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.1\\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}=(0.4,0.5,0.7,0.5)$;

(4) $\begin{pmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.7\\ 0.1 & 0.2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.4\\ 0.6\\ 0.2\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.8\\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.5\\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.6\\ 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7\\ 0.4\\ 0.5\\ 0.8\end{pmatrix}$.

第5章 模糊线性规划

线性规划是最优化方法中理论完整、方法成熟、应用广泛的一个重要分支，可以应用于生产计划、物资调运、资源优化配置、地区经济规划等问题. 普通线性规划的约束条件和目标函数都是确定的，但在一些实际问题中，约束条件可能带有弹性，目标函数可能不是单一的，价值系数可能带有模糊性. 这些问题可以用模糊的方法来处理. 引入隶属函数概念，将约束条件和目标函数模糊化，从而导出一个新的线性规划问题，它的最优解称为原问题的模糊最优解. 本章先简略回顾一下普通线性规划问题，然后再讨论模糊线性规划问题.

5.1 线性规划模型简介

本节内容仅仅是一般性介绍普通线性规划问题的数学模型以及常用软件的求解方法，详细讨论请读者参考相关的线性规划教材.

5.1.1 线性规划问题的数学模型

先看一个例子.

例5.1.1 最优生产计划 某工厂用A_1、A_2两种原料生产B_1、B_2、B_3三种产品，每吨产品的利润(单位:万元)、需用原料数(单位:t)及现有原料数(单位:t)如表5.1所示. 求使总利润最大的生产方案.

表5.1

原料	产品			现有原料
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	1	2	7
A_2	1	3	2	11
每吨产品的利润	2	3	1	

解 设x_1,x_2,x_3分别表示B_1、B_2、B_3的生产量(单位:t). 这一问题的数学模型为

$$\max f=2x_1+3x_2+x_3; \tag{5.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3\leqslant 7, & (5.2)\\ x_1+3x_2+2x_3\leqslant 11, & (5.3)\\ x_1,3x_2,x_3\geqslant 0. & (5.4)\end{cases}$$

这里 s. t. 是英文 subject to (满足于)的缩写. 式(5.1)称为目标函数,式(5.2)、(5.3)、(5.4)称为约束条件.

线性规划问题的数学模型的一般形式是

$$\max(\text{或}\min) f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n, \tag{5.5}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \quad (\text{或}=b_i\text{ 或}\geqslant b_i;i=1,2,\cdots,m), & (5.6)\\ x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n). & (5.7)\end{cases}$$

其中 a_{ij} 为技术系数,b_i 为资源限量,c_j 为价值系数($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$),它们均为确定的已知量;$x_j$ ($j=1,2,\cdots,n$)为决策变量. 在实际问题中,决策变量一般都要求非负限制($x_j\geqslant 0$);若无非负限制,决策变量可用两个非负变量之差来代替.

满足约束条件(5.6)、(5.7)的一组变量的值 x_j^* ($j=1,2,\cdots,n$)称为线性规划问题的一个可行解,使目标函数(5.5)取得最优(最大或最小)值的可行解称为最优解.

下面介绍将线性规划问题的一般形式转化为其他形式的方法.

1° 目标函数最大与最小相互转换:将 f 换为 $-f$;

2° 不等式约束(不大于或不小于)转化为等式约束:加上(或减去)一个新变量;

3° 等式约束($\sum a_{ij}x_j=b_i$)转化为不等式约束:用 $\sum a_{ij}x_j\leqslant b_i$ 及 $\sum a_{ij}x_j\geqslant b_i$ 取代 $\sum a_{ij}x_j=b_i$.

5.1.2 线性规划问题的常用软件求解方法

1. lindo 软件

lindo 软件可以求解普通线性规划、整数线性规划、0-1 线性规划、二次规划等问题. 例 5.1.1 中线性规划模型 lindo 软件求解方法是,在其编辑窗口内编写如下代码:

```
max   2x1+3x2+x3
s.t.
2x1+x2+2x3<7
x1+3x2+2x3<11
end
```

然后单击工具栏中的图标即可. lindo 软件默认所有变量非负,代码易懂易学,代码中的"＜"换成"＜＝"也行.

2. lingo 软件

lingo 软件可以求解普通线性规划、整数线性规划、0-1 线性规划及可用矩阵表示的非线性规划等问题. 例 5.1.1 中线性规划模型 lingo 软件求解方法是,在其编

辑窗口内编写如下代码：

```
max = 2*x1+3*x2+x3;
2*x1+x2+2*x3<7;
x1+3*x2+2*x3<11;
```

同样，单击工具栏中的图标即可. lingo 软件同样默认所有变量非负，在编写代码时格式要求非常严格，每一语句结束后要用"；"表示. 当数据量很大时，可采用下述代码：

```
MODEL:
SETS:
    JZXS/1..3/:c; !定义价值系数向量大小;
    ZYXL/1..2/:b; !定义资源限量向量大小;
    LINK1(JZXS):x; !定义决策变量向量大小;
    LINK2(ZYXL, JZXS):A; !定义技术系数矩阵大小;
ENDSETS
DATA:
    c = 2  3  1;
    b = 7  11;
    A = 2  1  2
        1  3  2;
ENDDATA
MAX = @SUM(LINK1(J): c(J) * x(J)); !目标函数;
    @FOR(ZYXL(I): @SUM(JZXS(J): A(I,J) * x(J)) < b(I)); !约束条件;
END
```

3. MATLAB **软件**

MATLAB 软件功能强大，求解线性规划问题可用其中的两个函数 lp 和 linprog，在MATLAB 命令窗口中输入help lp 或help linprog 可知其用法. 附录B 中给出了单纯形法求解线性规划问题的MATLAB 源代码程序 TwoLp. m.

5.2 模糊环境下的条件极值

设X为非空集，$f: X\mapsto R$，A是X的一个普通子集，若有$x^*\in A$，使

$$f(x^*)=\max_{x\in A}\{f(x)\},$$

则称x^*为f在A上的条件极大值点，称$f(x^*)$为f在A上的条件极大值.

若将普通约束A换成模糊约束$\underset{\sim}{A}$，如何求f在模糊集$\underset{\sim}{A}$约束下的极大值呢？

首先,需要将目标函数$f(x)$模糊化,即建立f在X上的一个模糊目标集$\underset{\sim}{G}$满足:$\forall x_1, x_2 \in X$,若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则有$\underset{\sim}{G}(x_1) \leqslant \underset{\sim}{G}(x_2)$.

模糊目标集$\underset{\sim}{G}$通常定义为:当f在X上的上确界M、下确界m存在时,有

$$\underset{\sim}{G}(x)=\frac{f(x)-m}{M-m}, \quad \forall \ x \in X,$$

否则适当选取$M>m$,定义

$$\underset{\sim}{G}(x)=\begin{cases} 0, & f(x) \leqslant m, \\ \dfrac{f(x)-m}{M-m}, & m<f(x) \leqslant M, \\ 1, & f(x)>M. \end{cases}$$

其次,定义模糊判别$\underset{\sim}{D}$,通常采用以下两个定义.

定义 5.2.1 对称型模糊判别:$\forall x \in X, \underset{\sim}{D}(x)=\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{G}(x)$.

定义 5.2.2 加权型模糊判别:适当选取$a, b \geqslant 0, a+b=1, \forall x \in X, \underset{\sim}{D}(x)= a \underset{\sim}{A}(x)+b \underset{\sim}{G}(x)$.

对称型模糊判别是将约束条件和目标函数平等看待,加权型模糊判别是将约束条件和目标函数不平等看待.

最后,根据最大隶属原则求出x^*,使得

$$\underset{\sim}{D}(x^*)=\max_{x \in X}\{\underset{\sim}{D}(x) \mid \underset{\sim}{D}(x)=\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{G}(x)\} \tag{5.8}$$

或

$$\underset{\sim}{D}(x^*)=\max_{x \in X}\{\underset{\sim}{D}(x) \mid \underset{\sim}{D}(x)=a \underset{\sim}{A}(x)+b \underset{\sim}{G}(x), a, b \geqslant 0, a+b=1\}, \tag{5.9}$$

称x^*为f在$\underset{\sim}{A}$上的模糊条件极大值点,称$f(x^*)$为f在$\underset{\sim}{A}$上的模糊条件极大值.

对于多约束$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_m$和多目标$\underset{\sim}{G}_1, \underset{\sim}{G}_2, \cdots, \underset{\sim}{G}_l$的情况,可以采用

$$\underset{\sim}{A}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m} \underset{\sim}{A}_i(x)$$

或

$$\underset{\sim}{A}(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i \underset{\sim}{A}_i(x), \quad a_i \geqslant 0, \text{且} \sum_{i=1}^{m} a_i=1,$$

$$\underset{\sim}{G}(x)=\bigwedge_{j=1}^{l} \underset{\sim}{G}_j(x)$$

或

$$\underset{\sim}{G}(x)=\sum_{j=1}^{l} g_j \underset{\sim}{G}_j(x), \quad g_j \geqslant 0, \text{且} \sum_{j=1}^{l} g_j=1$$

进行模糊处理,然后采用式(5.8)或式(5.9)进行模糊判别.

例 5.2.1 年轻人中的最高者 设$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$为5个人的集合,$X$中每个人的身高$f(x)$(单位:cm)如表5.2所示.已知

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}$$

表示X中"年轻人"的模糊集,求X中年轻人的最高者.

表5.2

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	171	180	165	174	168

解 将身高模糊化后,得

$$\underset{\sim}{G}=\frac{f(x)-165}{180-165}=\frac{0.4}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}.$$

采用式(5.8)进行模糊判别(即对称型模糊判别),有

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{G}=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.2}{x_5},$$

得到 X 中年轻人的最高者是 x_4.

事实上,$\underset{\sim}{G}$是 X 的模糊子集"高个子",$\underset{\sim}{D}$是 X 的模糊子集"年轻人中的高个子",求 X 中年轻人的最高者实际上是求 X 中两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$="年轻人"与 $\underset{\sim}{G}$="高个子"的交集 $\underset{\sim}{D}$中隶属度最大者.

例5.2.2 大衣购买选择 某人想购买一件大衣,他提出如下标准:式样一般,质量好,尺寸合身,价格尽量便宜.设有5件大衣 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$供选择,调查结果如表5.3所示.他应购买哪一件大衣?

表5.3

大衣	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
式样	过时	一般	较陈旧	较新	时髦
质量	好	较好	好	较差	一般
尺寸	合身	较合身	合身	合身	较合身
价格	40	80	100	85	75

解 根据他的要求,可将式样、质量、尺寸化为模糊约束 $\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\underset{\sim}{A}_3$,而将价格视为模糊目标 $\underset{\sim}{G}$,如表5.4所示.

表5.4

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\underset{\sim}{A}_1$	0	0.7	0.5	0.8	1
$\underset{\sim}{A}_2$	1	0.8	1	0.4	0.6
$\underset{\sim}{A}_3$	1	0.8	1	1	0.8
$\underset{\sim}{G}$	1	0.33	0	0.25	0.5

将式样、质量、尺寸平等看待,得

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}_1\cap\underset{\sim}{A}_2\cap\underset{\sim}{A}_3=\frac{0}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.4}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}.$$

若采用式(5.8),即将模糊目标与模糊约束平等看待,则

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{G}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.33}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.25}{x_4}+\frac{0.5}{x_5},$$

他应购买大衣 x_5,这与他要求价格尽量便宜不太相符.如果要求价格尽量便宜,把约束放松,如令 $a=0.4$,$b=0.6$,采用式(5.9),有

$$\underset{\sim}{D}=0.4\underset{\sim}{A}+0.6\underset{\sim}{G}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.48}{x_2}+\frac{0.20}{x_3}+\frac{0.31}{x_4}+\frac{0.54}{x_5},$$

他应购买大衣 x_1.

5.3 模糊线性规划模型

5.3.1 资源限量带有模糊性

设普通线性规划的标准形式为

$$\min\ f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}$$

若约束条件带有弹性,即资源限量 b_i 可能取 (b_i-d_i,b_i+d_i) 内的某一个值,这里的 $d_i>0$,它是决策人根据实际问题选择的伸缩指标.这样的规划称为模糊线性规划.

记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $t_0(\boldsymbol{x})=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$,

$$t_i(\boldsymbol{x})=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

那么普通线性规划的标准形式可改写为

$$\min\ f=t_0(\boldsymbol{x}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}t_i(\boldsymbol{x})=b_i, & i=1,2,\cdots,m,\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{5.10}$$

把约束条件带有弹性的模糊线性规划记为

$$\min\ f=t_0(\boldsymbol{x}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}t_i(\boldsymbol{x})=[b_i,d_i], & i=1,2,\cdots,m,\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{5.11}$$

这里的 $t_i(\boldsymbol{x})=[b_i,d_i]$ 表示:当 $d_i=0$(普通约束)时,$t_i(\boldsymbol{x})=b_i$;当 $d_i>0$(模糊约束)时,$t_i(\boldsymbol{x})$取(b_i-d_i,b_i+d_i)内的某一个值.

同样,用$t_i(\boldsymbol{x})\leqslant[b_i,d_i]$表示:当$d_i=0$(普通约束)时,$t_i(\boldsymbol{x})\leqslant b_i$;当$d_i>0$(模糊约束)时,$t_i(\boldsymbol{x})$不大于$(b_i,b_i+d_i)$内的某一个值.而用$t_i(\boldsymbol{x})\geqslant[b_i,d_i]$表示当$d_i=0$(普通

约束)时，$t_i(x)\geqslant b_i$；当 $d_i>0$(模糊约束)时，$t_i(x)$不小于(b_i-d_i,b_i)内的某一个值.

请注意模糊线性规划(5.11)与下述普通线性规划

$$\min f=t_0(x),$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}b_i-d_i\leqslant t_i(x)\leqslant b_i+d_i, & i=1,2,\cdots,m,\\ x\geqslant 0\end{cases}\tag{5.12}$$

的区别.

将模糊线性规划(5.11)中带有弹性的约束条件$(d_i>0)$模糊化，其隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{A}_i(x)=\begin{cases}0, & t_i<b_i-d_i,\\ 1+\dfrac{t_i-b_i}{d_i}, & b_i-d_i\leqslant t_i<b_i,\\ 1, & t_i=b_i,\\ 1-\dfrac{t_i-b_i}{d_i}, & b_i<t_i\leqslant b_i+d_i,\\ 0, & t_i>b_i+d_i.\end{cases}$$

其中 $t_i=t_i(x)$，其图形如图5.1所示. 而将模糊线性规划(5.11)中普通约束条件$(d_i=0)$的隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{A}_i(x)=1,\quad t_i(x)=b_i.$$

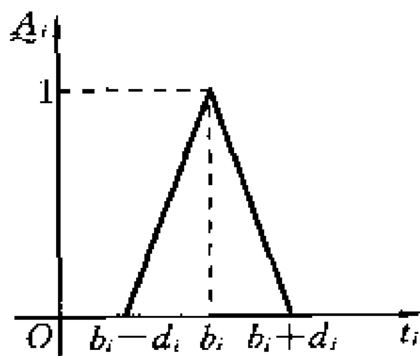


图 5.1

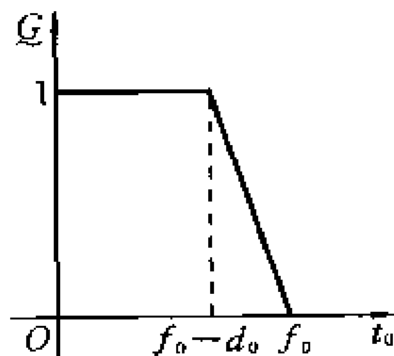


图 5.2

设普通线性规划(5.10)、(5.12)的最优值分别为 f_0,f_1，一般来说应有 $f_1<f_0$，否则模糊线性规划(5.11)中模糊约束条件的伸缩指标没有起作用. 记 $d_0=f_0-f_1$，则 $d_0>0$，它为模糊线性规划(5.11)中目标函数的伸缩指标，d_0 也可由决策人确定. 将模糊线性规划(5.11)中目标函数模糊化，其隶属函数定义为

$$\underset{\sim}{G}(x)=\begin{cases}1, & t_0\leqslant f_0-d_0,\\ \dfrac{f_0-t_0}{d_0}, & f_0-d_0<t_0\leqslant f_0,\\ 0, & t_0>f_0.\end{cases}$$

其中 $t_0=t_0(x)$，其图形如图5.2所示.

由 $\underset{\sim}{A}_i(x)$和 $\underset{\sim}{G}(x)$定义容易得到以下命题.

命题 5.3.1　$\forall\ \lambda\in[0,1]$,有

$$\underset{\sim}{A}_i(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\begin{cases}t_i(x)-d_i\lambda\geqslant b_i-d_i,\\t_i(x)+d_i\lambda\leqslant b_i+d_i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

命题 5.3.2　$\forall\ \lambda\in[0,1]$,有

$$\underset{\sim}{G}(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow t_0(x)+d_0\lambda\leqslant f_0.$$

为了求解模糊线性规划(5.11)和方便计算,令

$$\underset{\sim}{A}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}\underset{\sim}{A}_i(x),$$

并采用对称型模型(5.8)进行模糊判别.

由于对称型模糊判别是将目标函数和所有约束条件平等看待,所以要使所有的模糊约束条件尽可能满足以及目标函数尽可能达到最优,就要求 x^* 满足 $\underset{\sim}{A}_i(x^*)\geqslant\lambda$ 及 $\underset{\sim}{G}(x^*)\geqslant\lambda$,且使 λ 达到最大值. 根据命题 5.3.1 和命题 5.3.2 可得

$$\max\lambda,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}t_0(x)+d_0\lambda\leqslant f_0,\\t_i(x)-d_i\lambda\geqslant b_i-d_i,\quad i=1,2,\cdots,m,\\t_i(x)+d_i\lambda\leqslant b_i+d_i,\quad i=1,2,\cdots,m,\\x\geqslant 0,\lambda\geqslant 0.\end{cases}\tag{5.13}$$

设普通线性规划(5.13)的最优解为 x^*,λ^*,则模糊线性规划(5.11)的模糊最优解为 x^*,模糊最优值为 $t_0(x^*)$. 所以,求解模糊线性规划(5.11)相当于求解普通线性规划(5.10)、(5.12)、(5.13). 此外,再补充两点说明:

1° 若要使某个模糊约束条件尽可能满足,只需将其伸缩指标降低直至为零;

2° 若模糊线性规划(5.11)中的目标函数为求最大值,或模糊约束条件为近似不大于(不小于),其相应的隶属函数可类似地写出.

模糊线性规划转化为普通线性规划的规律总结如下:

1° 目标函数转化为普通约束.

设约束条件中不考虑伸缩指标时目标函数的最优值为 f_0,约束条件对伸缩指标完全放开时目标函数的最优值为 f_1(f_1 比 f_0 优),则目标函数 $\max(\min)t_0(x)$ 转化为普通约束为 $t_0(x)+(f_0-f_1)\lambda\geqslant$(或$\leqslant$)$f_0$.

2° 模糊约束转化为普通约束.

a) 当第 i 个模糊约束为 $t_i(x)\geqslant[b_i,d_i]$ 时,转化为普通约束为 $t_i(x)-d_i\lambda\geqslant b_i-d_i$;

b) 当第 i 个模糊约束为 $t_i(x)\leqslant[b_i,d_i]$ 时,转化为普通约束为 $t_i(x)+d_i\lambda\leqslant b_i+d_i$;

c) 当第 i 个模糊约束为 $t_i(x)=[b_i,d_i]$ 时,先将 $t_i(x)=[b_i,d_i]$ 转化为两个模糊约束 $t_i(x)\geqslant[b_i,d_i]$ 和 $t_i(x)\geqslant[b_i,d_i]$,然后按 a) 和 b) 处理.

附录B 中给出了求解模糊线性规划问题的MATLAB 源代码程序FuzzyLp. m.

例 5.3.1　求解模糊线性规划

$$\max f = x_1 - 4x_2 + 6x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant [8,2], \\ x_1 - 6x_2 + x_3 \geqslant [6,1], \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = [-4, 0.5], \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

解　(1) 解普通线性规划

$$\max f = x_1 - 4x_2 + 6x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \end{cases}$$

得最优解为 $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 6$，最优值为 38.

(2) 解普通线性规划

$$\max f = x_1 - 4x_2 + 6x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8 + 2 = 10, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 \geqslant 6 - 1 = 5, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \geqslant -4 - 0.5 = -4.5, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \leqslant -4 + 0.5 = -3.5, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \end{cases}$$

得最优解为 $x_1 = 2.75, x_2 = 0, x_3 = 7.25$，最优值为 46.25.

(3) $f_0 = 38, d_0 = 46.25 - 38 = 8.25$. 目标函数和各约束条件的隶属函数图形分别如图 5.3、图 5.4、图 5.5、图 5.6 所示.

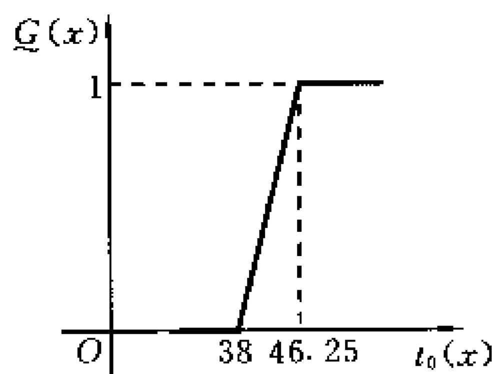


图 5.3

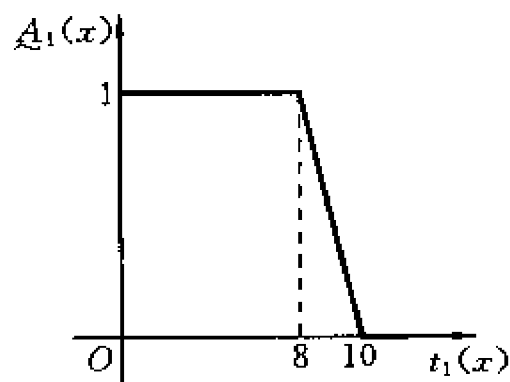


图 5.4

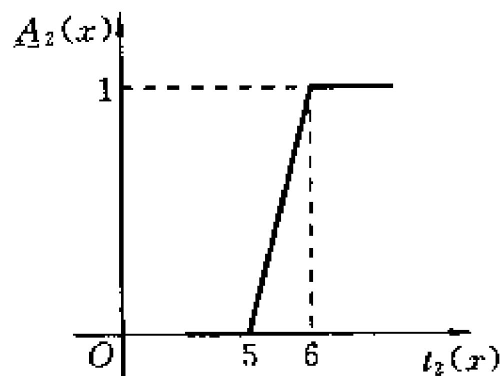


图 5.5

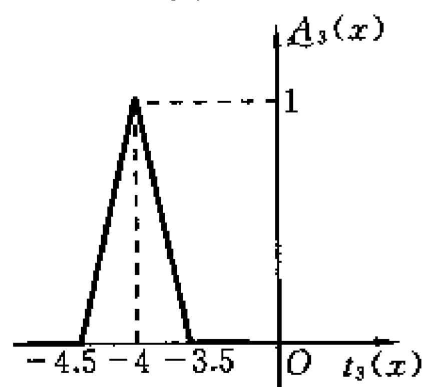


图 5.6

(4) 解普通线性规划

$$\max \lambda,$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1-4x_2+6x_3-8.25\lambda\geqslant 38,\\ x_1+x_2+x_3+2\lambda\leqslant 10,\\ x_1-6x_2+x_3-\lambda\geqslant 5,\\ x_1-3x_2-x_3-0.5\lambda\geqslant -4.5,\\ x_1-3x_2-x_3+0.5\lambda\leqslant -3.5,\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,\end{cases}$$

得最优解为

$$x_1=2.375,\quad x_2=0,\quad x_3=6.625,\quad \lambda=0.5.$$

从而,原问题的模糊最优解为 $x_1=2.375, x_2=0, x_3=6.625$,模糊最优值为 42.125.

5.3.2 多目标线性规划

在相同的条件下,要求多个目标函数都得到较好的满足,这便是多目标规划.若目标函数和约束条件都是线性的,则为多目标线性规划.一般来说,多个目标函数不可能同时达到其最优值,因此只能求使各个目标都比较"满意"的模糊最优解.下面通过具体例子来说明如何用模糊方法求解多目标线性规划问题(附录B中给出了模糊方法求解多目标线性规划问题的MATLAB源代码程序MoLp.m).

例5.3.2 解多目标线性规划

$$\min f_1=x_1+2x_2-x_3,$$
$$\max f_2=2x_1+3x_2+x_3,$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3\leqslant 10,\\ x_1+4x_2-x_3\geqslant 6,\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

解 (1) 解普通线性规划

$$\min f_1=x_1+2x_2-x_3,$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3\leqslant 10,\\ x_1+4x_2-x_3\geqslant 6,\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,\end{cases}$$

得最优解为 $x_1=0, x_2=2, x_3=2$,最优值为2,此时 $f_2=8$.

(2) 解普通线性规划

$$\max f_2=2x_1+3x_2+x_3,$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3\leqslant 10,\\ x_1+4x_2-x_3\geqslant 6,\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,\end{cases}$$

得最优解为 $x_1=10,x_2=0,x_3=0$，最优值为20，此时 $f_1=10$.

(3) 同时考虑两个目标，合理的方案是使 $f_1\in[2,10]$，$f_2\in[8,20]$，可取伸缩指标分别为 $d_1=8,d_2=12$. 如果认为目标 f_1 更重要，可单独缩小 d_1；如果认为目标 f_2 更重要，可单独缩小 d_2.

目标 f_1 和 f_2 模糊化后的隶属函数分别如图5.7、图5.8所示.

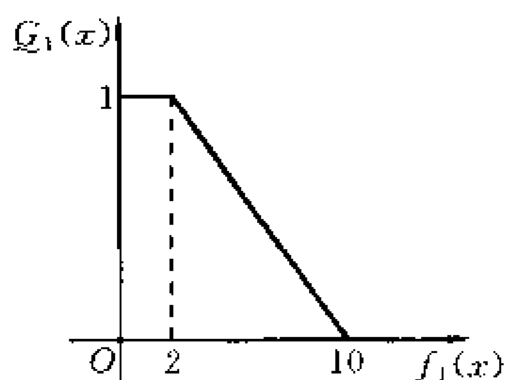


图5.7

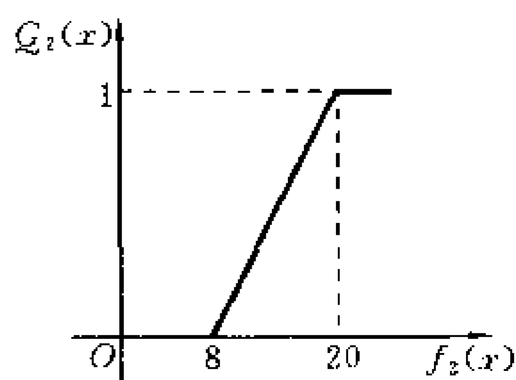


图5.8

(4) 采用对称型模糊判别，即将所有目标函数与所有约束条件平等看待，然后解普通线性规划

$$\max \lambda,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+8\lambda\leqslant 10,\\ 2x_1+3x_2+x_3-12\lambda\geqslant 8,\\ x_1+3x_2+2x_3\leqslant 10,\\ x_1+4x_2-x_3\geqslant 6,\\ x_1,x_2,x_3,\lambda\geqslant 0,\end{cases}$$

得最优解为 $x_1=6.29,x_2=0.29,x_3=1.43,\lambda=0.57$. 所以原多目标线性规划问题的模糊最优解为 $x_1=6.29,x_2=0.29,x_3=1.43$，此时 $f_1=5.43,f_2=14.86$.

5.3.3 价值系数带有模糊性

当价值系数带有模糊性时，我们称这样的线性规划为模糊目标线性规划. 设模糊目标线性规划为

$$\min f=(c_{1M};\ c_{1L},c_{1R})_{LR}x_1+(c_{2M};\ c_{2L},c_{2R})_{LR}x_2+\cdots+(c_{nM};\ c_{nL},c_{nR})_{LR}x_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\end{cases}\tag{5.14}$$

其中 $(c_{1M};\ c_{1L},c_{1R})_{LR}$ 为模糊数，表示大约为 c_{jM}，c_{jL} $(c_{jL}\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n)$ 为 c_{jM} 的左伸缩指标，c_{jR} $(c_{jR}\geqslant 0)$ 为 c_{jM} 的右伸缩指标.

设多目标线性规划

$$\min f=c_{1M}x_1+c_{2M}x_2+\cdots+c_{nM}x_n,$$

$$\min f_L=(c_{1M}-c_{1L})x_1+(c_{2M}-c_{2L})x_2+\cdots+(c_{nM}-c_{nL})x_n,$$

$$\min f_R=(c_{1M}+c_{1R})x_1+(c_{2M}+c_{2R})x_2+\cdots+(c_{nM}+c_{nR})x_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

的模糊最优解为 $\boldsymbol{x}^*$，可将 $\boldsymbol{x}^*$ 视为模糊目标线性规划(5.14)的模糊最优解(附录B中给出了这种解法的MATLAB 源代码程序 FoLp.m).

上述方法来自文献[24]的2.3.3节"含模糊系数的线性规划模型".下面从模糊数学的基本思想——隶属函数出发，给出这一问题的一种非线性规划求解方法.

不妨设模糊目标函数为 $\min f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$，若 c_j 具有模糊性，将其隶属函数定义为

$$\mu_j(c_j)=\begin{cases}0, & c_j<c_{jM}-c_{jL},\\ 1+\dfrac{c_j-c_{jM}}{c_{jL}}, & c_{jM}-c_{jL}\leqslant c_j<c_{jM},\\ 1, & c_j=c_{jM},\\ 1-\dfrac{c_j-c_{jM}}{c_{jR}}, & c_{jM}<c_j\leqslant c_{jM}+c_{jR},\\ 0, & c_j>c_{jM}+c_{jR}.\end{cases}$$

其中 c_{jM},c_{jL},c_{jR} 均为已知，c_{jL},c_{jR} 分别为 c_{jM} 的左、右伸缩指标.

1° 求解线性规划

$$\min f=c_{1M}x_1+c_{2M}x_2+\cdots+c_{nM}x_n,$$

$$\text{s.t. 原约束条件.}$$

设其最优值为 f_0.

2° 求解二次规划

$$\min f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\text{原约束条件},\\ c_{jM}-c_{jL}\leqslant c_j\leqslant c_{jM}+c_{jR}, \quad j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$; $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变量，设其最优值为 f_1.

3° 合理假设目标函数的伸缩指标为 $d_0=f_0-f_1>0$，将目标函数模糊化.

4° 采用对称型模糊判别，即将目标函数与所有约束条件平等看待，然后求解带有二次约束的规划问题：

$$\max \lambda,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\text{原约束条件},\\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+d_0\lambda\leqslant f_0,\\ c_j-c_{jL}\lambda\geqslant c_{jM}-c_{jL}, \quad j=1,2,\cdots,n,\\ c_j+c_{jR}\lambda\leqslant c_{jM}+c_{jR}, \quad j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

其中 $\lambda,c_1,c_2,\cdots,c_n$; $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变量，设其最优解为 $\lambda^*,c_1^*,c_2^*,\cdots,c_n^*$; x_1^*,

$x_2^*,\cdots,x_n^*$，将 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 视为原模糊目标线性规划的模糊最优解.

例 5.3.3 解模糊目标线性规划[25]

$$\max f=(20;\ 3,4)_{LR}x_1+(10;\ 2,1)_{LR}x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}6x_1+2x_2\leqslant 21,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

解 (1) 求解线性规划

$$\max f=20x_1+10x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}6x_1+2x_2\leqslant 21,\\ x_1,x_2\geqslant 0,\end{cases}$$

得其最优值为105.

(2) 用lingo 软件求解二次规划

$$\max f=c_1x_1+c_2x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}6x_1+2x_2\leqslant 21,\\ 20-3\leqslant c_1\leqslant 20+4,\\ 10-2\leqslant c_2\leqslant 10+1,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

源代码如下：

```
MODEL:
SETS:
   JZXS/1..2/:c,cM,cL,cR; !定义价值系数向量、左右伸缩指标向量大小;
   ZYXL/1..1/:b; !定义资源限量向量大小;
   LINK1(JZXS):x; !定义决策变量向量大小;
   LINK2(ZYXL, JZXS):A; !定义技术系数矩阵大小;
ENDSETS
DATA:
   cM = 20   10;
   cL =   3    2;
   cR =   4    1;
   b = 21;
   A = 6   2;
ENDDATA
MAX = @SUM(LINK1(J): c(J) * x(J)); !二次目标函数;
   @FOR(ZYXL(I): @SUM(JZXS(J): A(I,J) * x(J)) < b(I)); !原约束条件;
   @FOR(JZXS(J): c(J) > cM(J) - cL(J)); !约束条件;
   @FOR(JZXS(J): c(J) < cM(J) + cR(J)); !约束条件;
END
```

解得其最优值为115.5.

(3) 合理假设目标函数的伸缩指标为$d_0=115.5-105=10.5>0$,将目标函数模糊化.

(4) 采用对称型模糊判别,即将目标函数与所有约束条件平等看待,然后用lingo 软件求解带有二次约束的规划问题

$$\max \lambda,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}6x_1+2x_2\leqslant 21,\\ c_1x_1+c_2x_2-10.5\lambda\geqslant 105,\\ c_1-3\lambda\geqslant 20-3,\\ c_1+4\lambda\leqslant 20+4,\\ c_2-2\lambda\geqslant 10-2,\\ c_2+\lambda\leqslant 10+1,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

源代码如下:

```
MODEL:
SETS:
   JZXS/1..2/:c,cM,cL,cR; !定义价值系数向量、左右伸缩指标向量大小;
   ZYXL/1..1/:b; !定义资源限量向量大小;
   LINK1(JZXS):x; !定义决策变量向量大小;
   LINK2(ZYXL, JZXS):A; !定义技术系数矩阵大小;
ENDSETS
DATA:
   cM = 20   10;
   cL =  3    2;
   cR =  4    1;
   b = 21;
   A = 6   2;
ENDDATA
MAX = Lmd; !目标函数;
   @FOR(ZYXL(I): @SUM(JZXS(J): A(I,J) * x(J)) < b(I)); !原约束条件;
   @FOR(JZXS(J): c(J) - cL(J) * Lmd > cM(J) - cL(J)); !约束条件;
   @FOR(JZXS(J): c(J) + cR(J) * Lmd < cM(J) + cR(J)); !约束条件;
   @SUM(JZXS(J): c(J) * x(J)) - 10.5 * Lmd > 105; !二次约束条件;
END
```

解得$\lambda=0.5$,$c=(21.75,10.5)$,$\boldsymbol{x}=(0,10.5)^{\mathrm{T}}$.将$\boldsymbol{x}=(0,10.5)^{\mathrm{T}}$视为原模糊目标线

性规划的模糊最优解. 文献[25]中用模糊数排序的方法解得 $x=(0.488,9.035)^T$,文献[24]中用向量极大即前一种转化为多目标线性规划的方法解得 $x=(0,10.5)^T$.

从实际应用的角度考虑,若价值系数在其可能变化的范围内波动时,最优解不变,不管哪一种解法都是最好的方法;或者在其最优解下,最优值更接近于真实最优值的方法是一种较好的方法. 依据这一原理,例5.3.3 的最优解应为 $x=(0,10.5)^T$.

5.4 模糊线性规划的应用

本节用两个实例说明模糊线性规划的应用.

例5.4.1 药品最优加工方案[25] 某药品加工厂生产甲、乙两种药品,甲种药品每千克利润3万元,乙种药品每千克利润4万元. 生产每千克甲种药品需要原料A略少于4 kg,需要原料B约12 kg. 生产每千克甲种药品需要原料A略多于20 kg,需要原料B约6.4 kg. 现原料A还有约4600 kg,原料B还有约4800 kg. 如何安排甲、乙两种药品的产量以使利润最大?

解 不妨假设技术系数比较精确(或者其变化不影响最优基);原料A最少有4500 kg,伸缩指标为100 kg;原料B最少有4700 kg,伸缩指标为200 kg;甲、乙两种药品的产量分别为 x_1,x_2(单位:kg). 建立如下模糊线性规划模型:

$$\max f=3x_1+4x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+20x_2\leqslant[4500,100],\\12x_1+6.4x_2\leqslant[4700,200],\\x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

求得模糊最优解约为 $x_1=312(\text{kg})$,$x_2=165(\text{kg})$,模糊最优值为1596(万元).

结果分析:在此最优解下需要原料A 4548 kg,原料B 4800 kg. 文献[24]中建立含模糊系数的线性规划模型得到的结果为 $x_1=308(\text{kg})$,$x_2=168(\text{kg})$,最优值为1598(万元),需要原料A 4592 kg,原料B 4771 kg.

例5.4.2 风险投资策略* 市场上有 n 种资产(如股票、债券等)S_i $(i=1,2,\cdots,n)$供投资者选择,某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资. 公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估,估算出在这一时期内购买 S_i 的平均收益率为 r_i,并预测出购买 S_i 的风险损失率为 q_i. 考虑到投资越分散,总的风险越小,公司确定,当用这笔资金购买若干种资产时,总体风险可用所投资的 S_i 中最大的一个风险来度量.

购买 S_i 要付交易费,费率为 p_i,并且当购买额不超过给定值 u_i 时,交易费按购买 u_i 计算(不买当然无须付费). 另外,假定同期银行存款利率是 r_0 $(r_0=5\%)$,且既

* 本题选自1998年全国大学生数学建模竞赛A题.

无交易费又无风险.

已知$n=4$时相关数据如表5.5所示.试给该公司设计一种投资组合方案,即用给定的资金M,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,而总体风险尽可能小.

表5.5

投资品种	收益率r_i/%	风险损失率q_i/%	交易费率p_i/%	u_i/元
S_1	28	2.5	1	103
S_2	21	1.5	2	198
S_3	23	5.5	4.5	52
S_4	25	2.6	6.5	40

解 设购买S_i的金额为x_i,所需的交易费为

$$c_i(x_i)=\begin{cases}0, & x_i=0,\\ p_iu_i, & 0<x_i<u_i,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ p_ix_i, & x_i\geqslant u_i,\end{cases}$$

设存银行的金额为x_0,显然$c_0(x_0)=0$.

对S_i投资的收益为

$$R_i(x_i)=(1+r_i)x_i-(x_i+c_i(x_i))=r_ix_i-c_i(x_i),$$

投资组合$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$的净收益为

$$R(\boldsymbol{x})=\sum_{i=0}^{n}R_i(x_i).$$

由题意,投资的风险为

$$Q(\boldsymbol{x})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}q_ix_i,$$

投资所需资金为

$$F(\boldsymbol{x})=\sum_{i=0}^{n}[x_i+c_i(x_i)].$$

因此,可建立双目标优化模型,即

$$\min\left\{\begin{pmatrix}Q(\boldsymbol{x})\\ -R(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\middle|F(\boldsymbol{x})=M,\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}.$$

因为M相当大,S_i若被选中,其投资额x_i一般都超过u_i,投资费用可简化为$c_i(x_i)=p_ix_i$.在进行计算时,可设$M=1$,此时$(1+p_i)x_i$可视作投资S_i的比例.

引入风险偏好参数λ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$和变量$x_{n+1}$,对双目标函数进行加权模糊化,可化为线性规划模型

$$\min\lambda x_{n+1}-(1-\lambda)\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ q_ix_i\leqslant x_{n+1},\quad i=1,2,\cdots,n,\\ x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}\geqslant 0.\end{cases}$$

代入具体的数据，让风险偏好参数$\lambda=0\sim1$内1000个等分点，分别求解上述线性规划模型，一共只得到如表5.6所示的5种最优方案.

表5.6

	投资方案				
	1	2	3	4	5
λ	[0.000,0.766]	[0.767,0.810]	[0.811,0.824]	[0.825,0.962]	[0.963,1.000]
S_1/%	99.01	36.90	31.40	23.76	0
S_2/%	0	61.50	52.33	39.60	0
S_3/%	0	0	14.27	10.80	0
S_4/%	0	0	0	22.84	0
存银行/%	0	0	0	0	1
净收益/%	26.73	21.65	21.06	20.16	5
风险/%	2.48	0.92	0.78	0.59	0
净收益对风险的弹性	0.3032	0.1822	0.1752	0.7520	—

由净收益对风险的弹性来看，选择投资方案4较好，因为在此处，当风险增加或减少1%时，收益将增加或减少0.752%.

习　题　5

1. 用lindo、lingo或MATLAB软件求解本章的例题和下列模糊线性规划问题：

(1) $\max f=3x_1+4x_2+4x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases}6x_1+3x_2+4x_3\leqslant[1200,100],\\ 5x_1+4x_2+5x_3\leqslant[1550,200],\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) $\min f=x_1+4x_2+2x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2+x_3\geqslant[8,2],\\ x_1+2x_2=[6,1],\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

2. 药物配方问题　某种药物含三种主要成分A_1、A_2、A_3，含量分别为75±5 mg/盒，120±5 mg/盒，138±10 mg/盒. 这三种成分主要来自5种原料B_1、B_2、B_3、B_4、B_5，各种原料每千克所含成分单价如表5.7所示. 现要配制该药10000盒，如何选购原料较好？

表 5.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
含 A_1/mg	85	60	120	80	120
含 A_2/mg	80	150	90	160	60
含 A_3/mg	100	120	150	120	200
单价/元	1.3	1.5	1.6	1.7	1.8

3. 农场规划问题　某农场有100 hm^2 土地及15000 元资金可用于发展生产. 农场劳动力情况为春夏季7000～7500 人·日,秋冬季6000～6200 人·日. 如果本身用不了可外出干活,春夏季收入2.1 元/(人·日),秋冬季收入1.8 元/(人·日). 该农场可种植三种作物:大豆、玉米、小麦,并饲养奶牛和鸡. 种植作物时不需要专门投资,而饲养动物时每头奶牛投资400 元,每只鸡3 元. 养奶牛时每头须拨出1.5 hm^2 土地种饲草,养鸡时不占用土地,农场现有条件最多允许养30 头奶牛和3000只鸡. 种植作物和饲养动物每年需要的人·日数及收入情况如表5.8 所示. 试规划该农场比较满意的经营方案.

表 5.8

	种植每公顷大豆	种植每公顷玉米	种植每公顷小麦	饲养每头奶牛	饲养每只鸡
春夏季劳动力/(人·日)	50	75	40	50	0.3
秋冬季劳动力/(人·日)	20	35	10	100	0.6
年净收入/元	175	300	120	400	2

第6章 模糊控制

1965年扎德教授提出了模糊数学理论后,模糊理论开始发展起来.1974年麦当尼(Mamdani)在蒸汽发动机上成功地运用了模糊控制,开始了模糊控制的应用阶段.目前模糊控制已经广泛应用于工业、农业、军事、医学等许多领域.

本章先简要介绍现代控制系统以及用lingo软件求解最优控制问题,然后再讨论模糊控制器的设计思想.

6.1 现代控制系统简介

自20世纪50年代末以来,控制论从理论到实践都得到了长足的发展,为人们提供了可以很好地研究动态系统并获得比较理想的方法.由于动态系统的广泛存在,现代控制理论的思想和方法已经广泛地应用于工业、农业、国防、航天、交通运输、经济管理、生物医学等许多领域.

6.1.1 连续时间控制模型

用微分方程组描述的控制系统的一般形式为

$$\dot{x}=f(x,u,t),\quad x(t_0)=x_0;$$
$$y=g(x,u,t),$$

其中x是n维状态向量,u是m维控制向量,y是r维输出向量.

当f和g都是x和u的线性函数时,控制系统称为线性控制系统,否则称为非线性控制系统,线性控制系统的一般形式是

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u, \tag{6.1}$$
$$y=C(t)x+D(t)u, \tag{6.2}$$

式(6.1)、(6.2)中$A(t)$,$B(t)$,$C(t)$,$D(t)$分别是$n\times n$,$n\times m$,$r\times n$,$r\times m$矩阵.

线性控制系统具有很多优点,比较容易处理,因此可在一定精度范围内用线性模型近似时,尽量采用近似线性模型.

当线性控制系统式(6.1)、(6.2)中的矩阵A,B,C,D均为常数矩阵时,控制系统称为定常线性控制系统或非时变线性控制系统,其一般形式为

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{6.3}$$
$$y=Cx+Du. \tag{6.4}$$

关于控制系统的稳定性、能控性、能观测性可参看文献[26].最优控制问题是

一个求泛函极值的问题,即在已给状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

和目标函数

$$J(\boldsymbol{u})=\theta(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t,$$

求最优控制 $\boldsymbol{u}(t)\in U$ 使 $J(\boldsymbol{u})$ 最小或最大.

下面介绍几种典型的最优控制问题.

1° 最短时间问题.最短时间问题要求将系统的状态由初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 转移到指定的状态 $\boldsymbol{x}_f$ 所用的时间最短,即求 $\boldsymbol{u}(t)$ 使在它的作用下 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$,并使

$$J(\boldsymbol{u})=\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t=t_f-t_0$$

最小.

2° 最小能量问题.最小能量问题要求将系统的状态由初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 转移到指定的状态 $\boldsymbol{x}_f$ 所用的能量最小,即求 $\boldsymbol{u}(t)$ 使在它的作用下 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$,并使

$$J(\boldsymbol{u})=\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t$$

最小.这里的 $\boldsymbol{R}$ 是加权矩阵,以体现对不同的控制变量所耗能量不同的重视程度.

3° 状态调节器问题.当系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 偏离平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时,可用状态变量的二次方和的积分衡量误差的积累.状态调节器问题的目标函数可取为

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}(t_f)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t.$$

其中 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 是加权矩阵,$[\boldsymbol{x}(t_f)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)$ 体现对终点偏差的重视,$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$ 对控制能量加以约束.

4° 跟踪问题.当要求输出轨线 $\boldsymbol{y}(t)$ 跟踪给定的轨线 $\boldsymbol{y}_d(t)$ 时,目标函数可取为

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{y}(t_f)-\boldsymbol{y}_d(t_f)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{y}(t_f)-\boldsymbol{y}_d(t_f)]$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t.$$

例 6.1.1 倒摆的控制模型[26] 设一倒摆安装在小车上,如图 6.1 所示.这是空间起飞助推器的姿态控制模型,使空间助推器保持在竖直位置.这里仅考虑二维问题,认为倒摆只在图 6.1 所示的平面内运动.倒摆靠加于小车上的控制力 u 使它保持竖直位置.

当 θ 很小时并忽略摆杆的转动惯量,描述小车与倒摆运动的微分方程为[26]

$$m_{车}\ddot{x}=u-m_{杆}g\theta,\qquad(6.5)$$

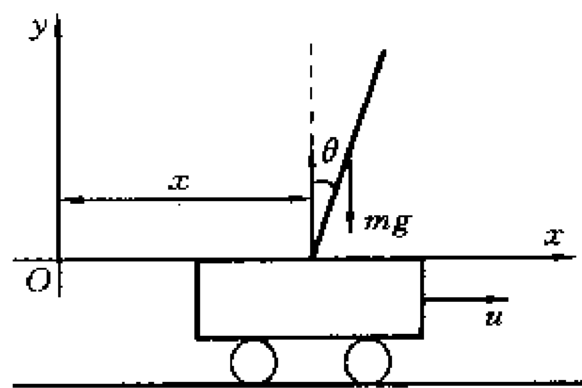


图 6.1

$$m_{车} l \ddot{\theta} = (m_{车} + m_{杆}) g\theta - u, \tag{6.6}$$

其中$m_{车}=2$ kg 为小车的质量，$m_{杆}=0.1$ kg 为摆杆的质量，$l=0.5$ m 为摆杆的长度，$g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$. 选取状态变量$x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}, x_3=x, x_4=\dot{x}$，则式(6.6)和式(6.5)化为状态方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 20.601x_1 - u, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -0.4905x_1 + 0.5u. \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，系统的输出向量为 $\boldsymbol{y}=(\theta,x)^{\mathrm{T}}$，于是得到倒摆的控制模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

6.1.2 无约束最优控制问题的求解方法

已给系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

和目标函数
$$J(\boldsymbol{u}) = \theta(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\mathrm{d}t,$$

无约束最优控制问题是：求最优控制$\boldsymbol{u}(t)$使$J(\boldsymbol{u})$最小或最大. 这里t_f已给定.

无约束最优控制问题的求解原理参看相关文献，此处只给出其求解方法：

1° 构造哈密顿(Hamilton)函数

$$H(\boldsymbol{x}, \lambda, \boldsymbol{u}, t) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t),$$

令$\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}=0$ 解出 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x},\lambda,t)$.

2° 解两点边值问题的常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t), & \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, & \lambda(t_f) = \dfrac{\partial \theta(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}, \end{cases}$$

得到 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*(t), \lambda=\lambda^*(t)$.

3° 最优控制 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*(t),\lambda^*(t),t)$.

例6.1.2 已给系统的状态方程

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1$$

和目标函数
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)\mathrm{d}t,$$

求$u(t)$，将状态$x(0)=1$转移到$x(1)=0$，并使$J(u)$最小.

解 构造哈密顿函数

$$H(x,\lambda,u,t)=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u),$$

令$\frac{\partial H}{\partial u}=0$解得$u=-\lambda$.

将$u=-\lambda$代入后得到两点边值问题的常微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+u=-x-\lambda, & x(0)=1,\\ \dot{\lambda}=-x+\lambda, & x(1)=0.\end{cases}$$

由第一个方程微分得到

$$\ddot{x}+\dot{x}+\dot{\lambda}=0,$$

以$\dot{\lambda}=-x+\lambda$及$\lambda=-x-\dot{x}$代入上式得到

$$\ddot{x}-2x=0,$$

再应用边界条件$x(0)=1$及$x(1)=0$得到

$$x(t)=\frac{e^{-\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}-e^{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}}{e^{-\sqrt{2}}-e^{\sqrt{2}}},$$

由此得到

$$u(t)=-\lambda=x+\dot{x}=\frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}}{e^{-\sqrt{2}}-e^{\sqrt{2}}}.$$

6.1.3 离散时间控制模型

用差分方程组描述的控制系统的状态方程和输出方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k),$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k).$$

类似连续时间控制模型,离散时间线性控制系统的一般形式是

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k),$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k),$$

离散时间定常线性控制系统的一般形式是

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k), \tag{6.7}$$
$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k).$$

由式(6.7)可得

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-j-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(j). \tag{6.8}$$

离散时间系统最优控制问题的一般提法是:求最优控制系列$\boldsymbol{u}(k_0)$, $\boldsymbol{u}(k_0+1)$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}(k_f-1)$,使目标函数

$$J(u)=\theta(x(k_f),k_f)+\sum_{k=k_0}^{k_f-1}L(x(k),u(k),k)$$

最小或最大.

离散时间系统最优控制问题的解法有泛函极值、动态规划方法,这里不作介绍.以下通过具体例子介绍lingo软件的求解方法.

例6.1.3 设离散系统的状态方程为

$$x(k+1)=1.3x(k)-0.3u(k),\quad x(0)=5,$$

求$u(k)$满足$0.5\leqslant u(k)\leqslant 1$,并使目标函数

$$J(u)=\sum_{k=0}^{3}0.25[x(k)+u(k)]$$

最小.

解 用lingo软件求得最优控制系列为$u(0)=1,u(1)=0.5,u(2)=0.5,u(3)=0.5$,其源代码如下:

```
MODEL:
SETS:
   ZTBL/1..5/:x; !定义状态变量大小;
   SRBL/1..4/:u; !定义输入变量大小;
ENDSETS
MIN = @SUM(SRBL(K): 0.25*(x(K) + u(K))); !目标函数;
   x(1)=5; !边值条件;
   @FOR(SRBL(K): x(K+1) = 1.3*x(K) - 0.3*u(K)); !状态方程;
   @FOR(SRBL(K): u(K) > 0.5 ); !约束条件;
   @FOR(SRBL(K): u(K) < 1 ); !约束条件;
END
```

例6.1.4 生产-库存-销售系统的控制模型 设某厂计划生产某一种产品,考虑其生产的管理问题.设第k季度该产品的生产量为$u(k)$,库存量为$x(k)$,销售量为$s(k)$.这里假设完全按订货量销售,因此$s(k)$是已知函数.那么该系统的状态方程为

$$x(k+1)=x(k)+u(k)-s(k),$$

假设生产费用为$0.005u^2(k)$,库存费用等于$x(k)$,那么四个季度的总费用是

$$J(u)=\sum_{k=0}^{3}[0.005u^2(k)+x(k)].$$

现设年初的库存量为$x(0)=0$,四个季度的订货量分别为600,700,500,1200件.求最优生产策略$u(0),u(1),u(2),u(3)$,使$x(4)=0$(满足销售并到年底没有积压)并且使总费用最小.

解 用lingo软件求解,其源代码如下:

```
MODEL:
SETS:
   ZTBL/1..5/:x; !定义状态变量大小;
   SRBL/1..4/:u,S; !定义输入变量大小;
ENDSETS
DATA:
   S = 600   700   500   1200; !订单;
ENDDATA
MIN = @SUM(SRBL(K): (0.005 * u(K) * u(K) + x(K))); !目标函数;
   x(1) = 0; x(5) = 0; !边值条件;
   @FOR(SRBL(K): x(K+1) = x(K) + u(K) - S(K)); !状态方程;
END
```

得最优生产策略为

$$u(0)=600,\quad u(1)=700,\quad u(2)=800,\quad u(3)=900,$$

相应的库存量为

$$x(0)=0,\quad x(1)=0,\quad x(2)=0,\quad x(3)=300,\quad x(4)=0.$$

在这一管理策略下,总费用为11800. 如果每个季度都按订货量生产,此时每个季度的库存量是0,总费用为12700,比最优策略要多用900.

从以上两个例子可以看出,离散时间定常线性控制系统的最优控制问题,是一个线性约束、线性或二次目标的规划问题,可用lingo软件求解. 对于连续时间控制系统,最好将其近似线性化,用差商近似代替微商离散化. 如定常线性控制系统的状态方程(6.3)可近似化为

$$\frac{\boldsymbol{x}((k+1)T)-\boldsymbol{x}(kT)}{T}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT),$$

这里T是计算机控制系统的采样周期. 不妨设$T=1$,则

$$\boldsymbol{x}(k+1)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k).$$

例6.1.1中倒摆的控制模型中状态方程离散化为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\20.601&1&0&0\\0&0&1&1\\-0.4905&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0.5\end{pmatrix}u(k).\tag{6.9}$$

设$\boldsymbol{x}(0)=(0.1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,倒摆的跟踪问题是求最优控制$u(0),u(1),u(2),\cdots$,使

$$J(u)=\sum_{k=0}^{\infty}[u^2(k)+x^2(1,k)+(x(3,k)-3)^2]$$

最小.

由式(6.9)可知,当 $u(k)=0, x(k)=(0,0,3,0)^{\mathrm{T}}$ 时, $x(k+1)=x(k)=(0,0,3,0)^{\mathrm{T}}$. 根据式(6.8),令 $k=4$,可得

$$x(4)=A^4x(0)+\sum_{j=0}^{3}A^{3-j}Bu(j).$$

将 $x(0)=(0.1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 20.601 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -0.4905 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0.5\end{pmatrix}$

代入上式,并令 $x(4)=(0,0,3,0)^{\mathrm{T}}$ 求得结果如表6.1所示.

表6.1

k	0	1	2	3	4	5	6	…	∞
$u(k)$	2.3594	1.5622	−3.9076	−0.014	0	0	0	…	0
$x(1,k+1)$	0.1	0.1	−0.1993	−0.0007	0	0	0	…	0
$x(2,k+1)$	0	−0.2993	0.1986	0.0007	0	0	0	…	0
$x(3,k+1)$	0	0	1.1306	2.9934	3	3	3	…	3
$x(4,k+1)$	0	1.1306	1.8627	0.0066	0	0	0	…	0

另外,状态调节器问题或跟踪问题也可以对部分状态变量或部分输出变量加以约束限制.

6.2 模糊控制器

在很多控制系统中,存在着不同程度的不确定因素,包括模型误差和外部干扰影响. 模糊控制理论以模糊数学为基础,以模糊集合、模糊关系、模糊推理来模仿人的思维来判断综合推理,处理和解决常规方法难以解决的问题. 模糊控制实际上是一种非线性控制,从属于智能控制的范畴. 模糊控制不要求知道被控对象的精确数学模型,例如一个不懂控制论的小孩就可以毫不费力地在手指上竖起一根竹竿,使它不倒. 模糊控制鲁棒性强(即抗干扰能力强),根据实际系统的输入输出结果数据,参考现场操作人员的运行经验,就可对系统进行实时控制. 模糊控制的基本原理可用图6.2表示.

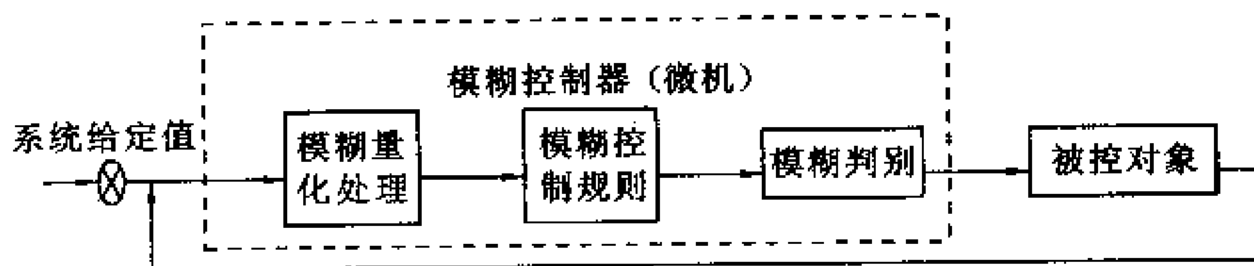


图6.2

在本节中所提到的输入和输出变量是针对模糊控制器而言的，因此含义和上一节相反，要控制的变量就是输出变量 u，即上一节中的输入变量.

6.2.1 模糊量化处理

设计模糊控制器时，一般先要将系统的输入变量偏差、偏差变化率进行模糊量化处理. 把系统输入变量偏差及偏差变化率的实际变化范围称为这些变量的基本论域.

设输入变量偏差的基本论域为 $[-X_e, X_e]$，一般定义输入变量偏差的量化论域为 $\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$，它表示

{负大(NB)，负中(NM)，负小(NS)，零(O)，正小(PS)，正中(PM)，正大(PB)}，

定义输入变量偏差的量化比例因子为 $K_e = X_e/6$.

对于任意输入变量偏差 $x \in [-X_e, X_e]$，负大、负中、负小、零、正小、正中、正大这 7 个模糊子集的隶属函数一般定义为

$$e_j(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-a_j}{\sigma}\right)^2\right], \tag{6.10}$$

其中，a_j 分别取 $-6K_e, -4K_e, -2K_e, 0, 2K_e, 4K_e, 6K_e$，$\sigma$ 取适当的正数. 由此将输入变量偏差 x 模糊化为一个模糊向量

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{E}(x) &= (e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x), e_5(x), e_6(x), e_7(x)) \\ &= (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7).\end{aligned}$$

其中 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ 分别表示 x 属于模糊子集负大、负中、负小、零、正小、正中、正大的隶属度.

同理，将输入变量偏差变化率的基本论域 $[-X_c, X_c]$ 的量化论域定义为

$$\{-6,-4,-2,0,2,4,6\},$$

输入变量偏差变化率的量化比例因子定义为 $K_c = X_c/6$. 输入变量偏差变化率的模糊化方法同输入变量偏差的模糊化方法一样.

类似地，将输出变量的基本论域 $[-Y_u, Y_u]$ 的量化论域也定义为

$$\{-6,-4,-2,0,2,4,6\},$$

输出控制变量的比例因子定义为 $K_u = Y_u/6$.

6.2.2 模糊控制规则

文献[27]介绍了 20 多条模糊控制规则，这里仅使用模糊推理："如果有模糊集 $\underset{\sim}{A}$，则有模糊集 $\underset{\sim}{B}$."即

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \circ \boldsymbol{R}, \tag{6.11}$$

其中 $\underset{\sim}{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_7)$ 为输出模糊向量，$\underset{\sim}{A}$ 为输入变量的实际值 a 模糊化后的模糊向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_7)$，模糊关系矩阵 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{7\times7}$ 可采用量化论域中的元素 $-6, -4,$

$-2,0,2,4,6$ 分别属于模糊子集负大、负中、负小、零、正小、正中、正大的隶属度，即可用下述公式

$$r_{ij}=\exp\left[-\left(\frac{d_j-d_i}{2}\right)^2\right],$$

这里 $d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7$ 分别为量化论域中的元素 $-6,-4,-2,0,2,4,6$，计算结果如表 6.2 所示.

表 6.2

	−6	−4	−2	0	2	4	6
负大	1.0000	0.3679	0.0183	0.0001	0	0	0
负中	0.3679	1.000	0.3679	0.0183	0.0001	0	0
负小	0.0183	0.3679	1.0000	0.3679	0.0183	0.0001	0
零	0.0001	0.0183	0.3679	1.0000	0.3679	0.0183	0.0001
正小	0	0.0001	0.0183	0.3679	1.0000	0.3679	0.0183
正中	0	0	0.0001	0.0183	0.3679	1.0000	0.3679
正大	0	0	0	0.0001	0.0183	0.3679	1.0000

表 6.2 表示模糊向量 $\underset{\sim}{B}$ 与模糊向量 $\underset{\sim}{A}$ 成近似正比关系.

例 6.2.1 若输入模糊向量

$$\underset{\sim}{A}=(0,0.0019,0.1054,0.7788,0.7788,0.1054,0.0019),$$

按式(6.11)计算，先取小后取大，则输出模糊向量

$$\underset{\sim}{B}=(0.0183,0.1054,0.3679,0.7788,0.7788,0.3679,0.1054).$$

现在，我们用倒摆的控制问题(例 6.1.1)来解释上述模糊控制规则. 只考虑摆杆的偏向角 θ：当摆杆向右偏移一点(正小)，则施加在小车上的作用力向右一点(正小)；当摆杆向左偏移一点(负小)，则施加在小车上的作用力向左一点(负小).

对于实际偏向角 θ 值，将其模糊化成模糊向量 $\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_7)$，按式(6.11)计算输出模糊向量 $\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_7)$. $b_1,b_2,\cdots,b_7$ 分别表示施加在小车上的作用力(即控制输出变量) u 属于模糊子集负大、负中、负小、零、正小、正中、正大的隶属度.

6.2.3 单输入变量的模糊判别

由模糊控制算法式(6.11)得出的是量化论域 $\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$ 上的模糊集，但被控对象只能接受精确值的控制量，这就需要进行输出信息的模糊判别，也就是要把模糊量转化为精确量. 常用的方法有如下三种：

1° 最大隶属度法. 应用最大隶属原则思想，选取隶属度最大的元素作为控制量 u，即若

$$b_j=\max\ \{b_1,b_2,\cdots,b_7\},$$

则取 $u=c_j$ 为控制量.

2° 加权平均法. 加权平均法将输出模糊向量归一化后作为输出控制量量化论域中各元素的权重,即应用公式

$$u=\left(\sum_{k=1}^{7}b_kd_k\right)\Big/\left(\sum_{k=1}^{7}b_k\right).$$

3° 中位数法. 把输出的模糊集的隶属度用线段连接的曲线与横坐标轴所围成的面积平分成两部分的数,此数称为中位数,将中位数作为控制量u.

例 6.2.2 设输出模糊集为

$$\underset{\sim}{B}=(0.0183,0.1054,0.3679,0.7788,0.7788,0.3679,0.1054).$$

按最大隶属度法,则取$u=(c_4+c_5)/2=(0+2)/2=1$为控制量.

按加权平均法,则取$u=2.3943/2.5225=0.9492$为控制量.

按中位数法,模糊集的隶属度曲线与横坐标轴所围成的面积为

$$S=0.0183+2\times(0.1054+0.3679+0.7788+0.7788+0.3679)+0.1054$$
$$=4.9213,$$

由于
$$0.0183+2\times(0.1054+0.3679)+0.7788=1.7437<S/2,$$
$$0.0183+2\times(0.1054+0.3679+0.7788)+0.7788=3.3013>S/2,$$

因此中位数应在c_4与c_5之间,即 0 与 2 之间,并满足方程

$$1.7437+0.7788u=S/2.$$

取$u=(S/2-1.7437)/0.7788\approx0.9206$为控制量.

由例 6.2.2 可见,对同一个模糊子集而言,不同的判别方法会得到不同的结果. 究竟哪个结果好,要由实践来检验. 最大隶属度法简单易行,但输出信息量利用太少. 加权平均法和中位数法都充分利用了全部输出信息,但中位数法计算量较大.

按上述方法计算出控制量后,再将控制量u乘以该控制变量的比例因子K_u后,得到该控制变量的实际输出值uK_u.

6.2.4 多输入变量的模糊判别

此时对于每一个输出变量,将对应多个输出的模糊集$\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\cdots,\underset{\sim}{B}_n$,下面给出两种处理方法:

1° 先令$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}_1\cup\underset{\sim}{B}_2\cup\cdots\cup\underset{\sim}{B}_n$,然后按单输入变量的模糊判别处理.

2° 先将模糊集$\underset{\sim}{B}_1,\underset{\sim}{B}_2,\cdots,\underset{\sim}{B}_n$分别按单输入变量的模糊判别方法得到$u_1,u_2,\cdots,u_n$,然后进行加权平均处理.

6.3 单输入、单输出模糊控制器的设计

单输入、单输出模糊控制器,即仅有一个输入变量和一个输出控制量的模糊控

制器,应用较为广泛.例如锅炉压力与加热的关系、汽轮机转速与阀门开度的关系、卫星姿态与作用力的关系、飞机或轮船的航向与舵的关系等,均可应用单输入单输出模糊控制器来控制.

设计模糊控制器时,必须明确模糊控制需要完成的任务,搞清楚输入变量偏差及偏差变化率与输出控制量之间的近似关系.

6.3.1 模糊控制器的设计(一)

1° 根据实际经验确定各变量的基本论域及量化论域,从而确定输入变量偏差的量化比例因子K_e、输入变量偏差变化率的量化比例因子K_c及输出控制量的比例因子K_u.

2° 确定输入变量偏差及偏差变化率的模糊化方法,偏差变化率的计算公式为

$$x_c(k)=x_e(k)-x_e(k-1),$$

即偏差变化率等于当前时刻偏差减去前一时刻偏差,从而将输入变量偏差x_e及偏差变化率x_c模糊化.

3° 确定输入变量偏差及偏差变化率与输出控制量之间的模糊关系矩阵$\boldsymbol{R}_e$和$\boldsymbol{R}_c$,根据式(6.11)计算出相应的输出模糊向量.

4° 确定模糊判别方法.

例6.3.1 倒摆的模糊控制器的设计(一) 倒摆的原理图如图6.1所示.这里仅考虑一个输入变量:摆杆的偏向角θ,即控制施加在小车上的作用力,使摆杆的偏向角θ保持在(-0.2,0.2)内(摆杆向左、右偏移都不超过11°).

由于倒摆的控制系统要求精度高,可将摆杆的偏向角θ、θ的变化率以及控制施加在小车上的作用力都量化为121个等级.量化论域都为

$$\{d_j\}=\{-6,-5.9,-5.8,\cdots,-0.1,0,0.1,\cdots,5.8,5.9,6\}.$$

量化比例因子分别为$K_e=0.05$,$K_c=0.05$,$K_u=1.3$.

摆杆的偏向角θ及θ的变化率与控制施加在小车上的作用力之间的模糊关系矩阵

$$\boldsymbol{R}_e=\boldsymbol{R}_c=\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{121\times121},\quad r_{ij}=\exp[-(d_j-d_i)^2].$$

摆杆的偏向角$\theta=x_e$的变化率x_c的计算公式为

$$x_c(k)=x_e(k)-x_e(k-1).$$

摆杆的偏向角θ及θ的变化率x_c的模糊化公式分别如下:

$$F_e(j)=\exp\left\{-\left[\frac{x_e-d(j)K_e}{0.05}\right]^2\right\},$$

$$F_c(j)=\exp\left\{-\left[\frac{x_c-d(j)K_c}{0.05}\right]^2\right\},$$

摆杆的偏向角θ及θ的变化率相应的输出模糊向量计算公式如下：

$$U_e = F_e \circ \boldsymbol{R}\ ,\quad U_c = F_c \circ \boldsymbol{R},$$

采用加权平均法进行模糊判别得到相应的输出控制量计算公式如下：

$$u_e = \Big(\sum_{k=1}^{121} F_e(k) d_k\Big) \Big/ \Big(\sum_{k=1}^{121} F_e(k)\Big),\quad u_c = \Big(\sum_{k=1}^{121} F_c(k) d_k\Big) \Big/ \Big(\sum_{k=1}^{121} F_c(k)\Big).$$

施加在小车上的作用力的计算公式如下：

$$u = (0.8u_e + 0.2u_c)K_u.$$

倒摆的MATLAB计算机仿真程序如下：

```
A=[1,1,0,0;20.601,1,0,0;0,0,1,1;-0.4905,0,0,1]; B=[0,-1,0,0.5]'; %仿真矩阵
x(1,1)=0.1;x(2,1)=0;x(3,1)=0;x(4,1)=0; %赋初值
d=-6:0.1:6; m=length(d); %量化论域
Ke=0.05; Kc=0.05; Ku=1.3; %量化比例因子
for(i=1:m)for(j=1:m)R(i,j)=exp(-(d(j)-d(i))^2);end;end %模糊关系矩阵
for(k=1:200) %进行 200 次仿真实验
    xe=x(1,k);xc=0; %计算输入变量偏差
    if(k>1)xc=x(1,k)-x(1,k-1);end %计算输入变量偏差的变化率
    for(j=1:m)Fe(j)=exp(-((xe-d(j)*Ke)/0.05)^2);end
    if(xe<-6*Ke)Fe(1)=1;
    elseif(xe>6*Ke)Fe(m)=1;end %以上将输入变量偏差模糊化
    for(j=1:m)Fc(j)=exp(-((xc-d(j)*Kc)/0.5)^2);end
    if(xc<-6*Kc)Fc(1)=1;
    elseif(xc>6*Kc)Fc(m)=1;end %以上将输入变量偏差变化率模糊化
    Ue=Max_min(Fe,R); Uc= Max_min (Fc,R); %先取小后取大,Max_min 是自编函数
    ue=sum(Ue*d')/sum(Ue);uc=sum(Uc*d')/sum(Uc); %加权平均法模糊判别
    u(k)=(0.8*ue+0.2*uc)*Ku; %计算实际输出量
    x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(k); %由倒摆运动方程进行仿真
end
t=1:201; y=x(1,:); plot(t,y); %输出摆杆偏向角变化图形如图 6.3 所示
```

图6.3是按上述方法进行200次仿真试验得到的. 当仿真试验次数增加时(读者不妨自己一试)，摆杆的偏向角在(−0.05,0.15)内呈周期性变化，周期大约70次.

模糊控制器设计时的注意事项：

1° 本方法适用于要求精度不太高的控制系统，如家用电器等.

2° 量化论域的等级不一定选7个，根据实际情况可多可少.

3° 比例因子K_e，K_c，K_u的确定是最困难的. K_e越小，系统上升时间越短，K_e使

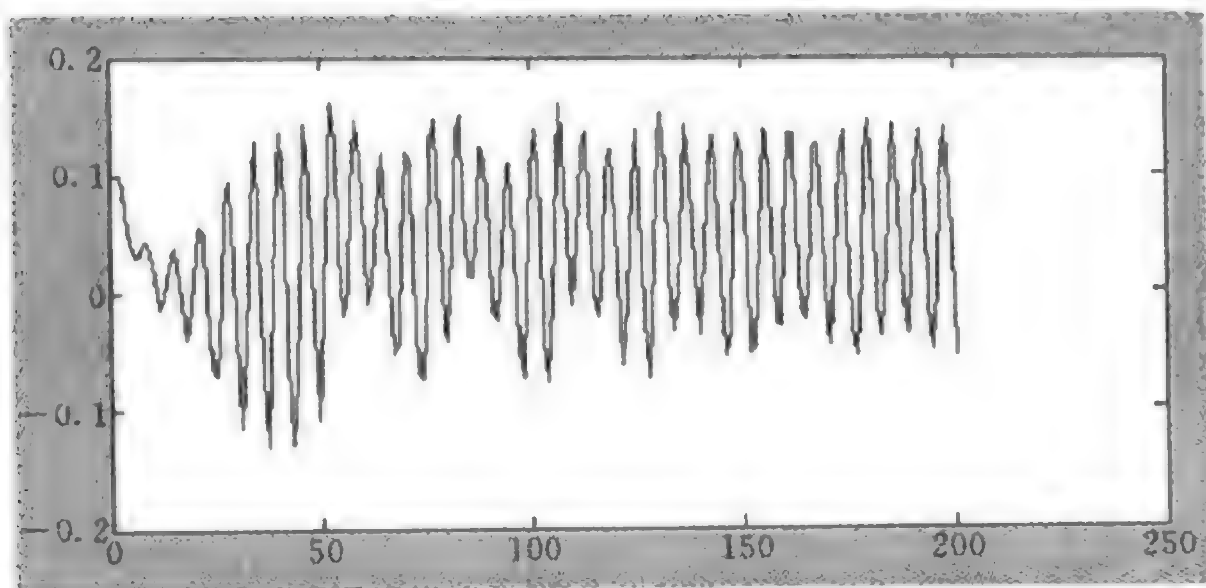


图6.3

系统过渡过程变长. K_c 越小,系统反映越迟钝,K_c 越大,系统反映越灵敏,实践表明,K_c 有十分明显的抑制超调作用. K_u 越大,系统上升时间越短,但越易导致振荡;K_u 过小易使系统动态过程变长. 在实际应用中,可动态调整比例因子 K_e, K_c, K_u.

6.3.2 模糊控制器的设计(二)

由图6.3可看出,虽然摆杆的偏向角θ保持在(−0.05,0.15)内,即摆杆向左偏移没有超过3°,向左右偏移没有超过9°,但还是不够理想. 对于精度要求比较高的单输入单输出控制系统,可采用下述方法设计模糊控制器.

1° 根据实际经验或试验得到输出控制量与输入变量偏差的一组数据,并由

$$x_c(k)=x_e(k)-x_e(k-1)$$

计算输入变量偏差变化率,将输入变量偏差及偏差变化率从小到大排列(表6.3). 这就是说,将输入变量偏差划分为n个等级,输入变量偏差变化率划分为m个等级.

表6.3

x_c	x_e			
	e_1	e_2	…	e_n
c_1	u_{11}	u_{12}	…	u_{1n}
c_2	u_{21}	u_{22}	…	u_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮
c_m	u_{m1}	u_{m2}	…	u_{mn}

2° 建立输入变量偏差及偏差变化率各等级的隶属函数 $d_{ij}(x_e,x_c)$. 隶属函数 $d_{ij}(x_e,x_c)$应当满足:当$(x_e,x_c)\in[e_j,e_{j+1}]\times[c_i,c_{i+1}]$时,除了 d_{ij}, $d_{i,j+1}$, $d_{i+1,j}$, $d_{i+1,j+1}$外,其他各等级的隶属度都为零,特别当$(x_e,x_c)=(e_j,c_i)$时,$d_{ij}=1$,其他各等级的隶属度都为零.

3° 模糊判别方法：对于实际输入变量偏差x_e及偏差变化率x_c，计算各等级的隶属度d_{ij}，然后应用公式

$$u=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}u_{ij}\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\right).$$

将u作为控制变量的实际输出值.

当控制系统有较好的线性性，且$(x_e,x_c)\in[e_j,e_{j+1}]\times[c_i,c_{i+1}]$时，可采用下列公式：

$$u=u_{ij}+\frac{(x_e-e_j)(u_{i,j+1}-u_{ij})}{2(e_{j+1}-e_j)}+\frac{(x_c-c_i)(u_{i+1,j}-u_{ij})}{2(c_{j+1}-c_j)}.$$

当控制系统有特别好的线性性时，更直接地采用下列公式：

$$u=ax_e+bx_c.$$

例 6.3.2　倒摆的模糊控制器的设计(二)　原理同例 6.3.1. 由于倒摆的控制系统有特别好的线性性，可直接采用下列公式

$$u=20.75x_e+0.25x_c.$$

倒摆的 MATLAB 计算机仿真程序如下：

```
A=[1,1,0,0;20.601,1,0,0;0,0,1,1;-0.4905,0,0,1]; B=[0,-1,0,0.5]'; %仿真矩阵
x(1,1)=0.3;x(2,1)=0;x(3,1)=0;x(4,1)=0; %赋初值
for(k=1:200) %进行 200 次仿真实验
    xe=x(1,k);xc=0; %计算输入变量偏差
    if(k>1)xc=x(1,k)-x(1,k-1);end %计算输入变量偏差的变化率
    u(k)=20.75*xe+0.25*xc; %计算实际输出量
    x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(k); %由倒摆运动方程进行仿真
end
t=1:201; y=x(1,:); plot(t,y); %输出摆杆偏向角变化图形如图 6.4 所示
```

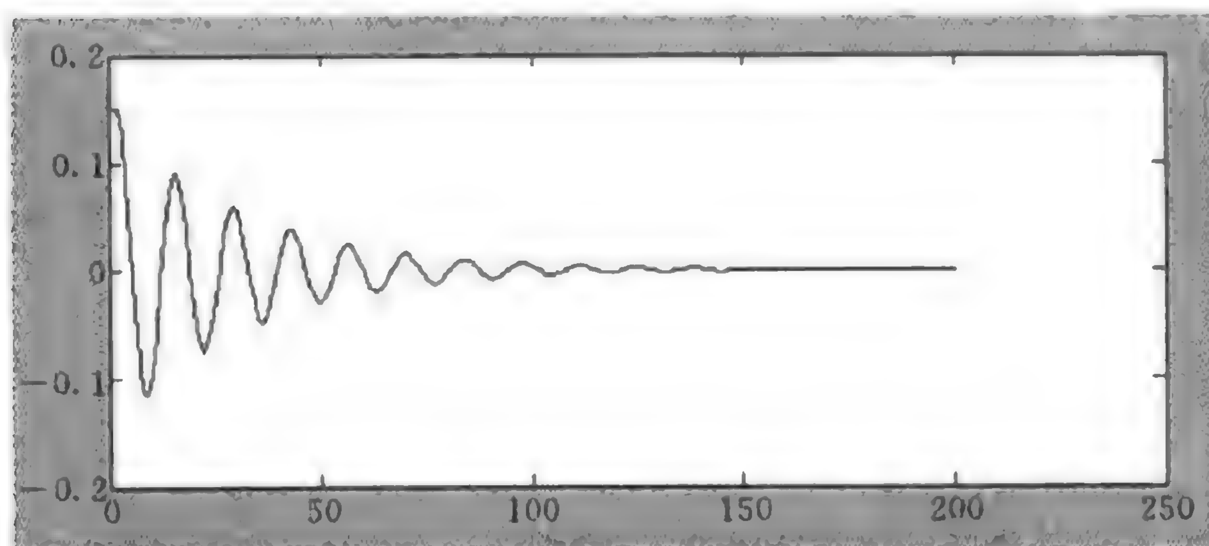


图 6.4

习 题 6

1. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1)=x(k)+u(k),\quad x(0)=1,$$

求$u(k)$,$k=0,1,\cdots,9$,使得$x(10)=0$,并使目标函数

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}u^2(k)$$

最小.

2. 人造卫星的姿态控制[26] 当人造卫星在运行过程中偏离要求的基准姿态时,需要通过其自身的喷嘴产生的推力进行矫正,在其示意图(图6.5)中,A,B是位于卫星上对称配置的喷嘴,喷嘴喷出的燃料燃烧时作用于卫星的反作用力为$F/2$,l是力臂,$\theta(t)$是在时刻的偏离角(卫星轴线偏离基准线的角度).设I为卫星绕其质心的转动惯量,则描述卫星运动的微分方程为

$$I\ddot{\theta}=lF\quad 或\quad \ddot{\theta}=lF/I.$$

令控制为$u(t)=lF/I$,则得到微分方程为$\ddot{\theta}=u(t)$.

(1) 写出人造卫星姿态控制的定常线性控制系统;

(2) 将上述定常线性控制系统转化为离散时间控制系统;

(3) 运用本书所讲的两种方法设计人造卫星姿态控制的模糊控制器.

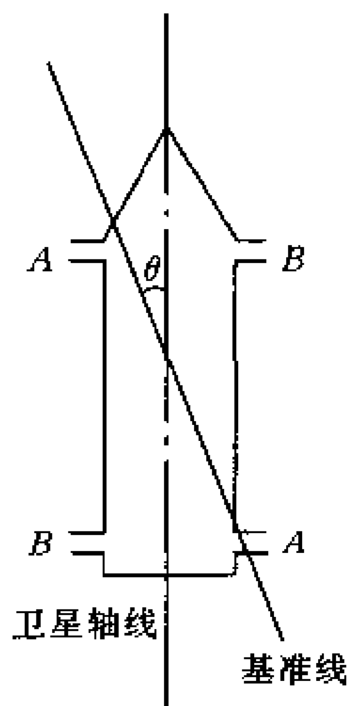


图6.5

3. 倒摆的模糊控制器的设计 运用本书所讲的两种方法设计倒摆的模糊控制器,除了使摆杆的偏向角θ(单位:rad)保持在(−0.2,0.2)内外,并要求小车的水平运动距离x(单位:m)保持在(2,5)内.

附录A 习题答案

习题1

2. (1) $\mathscr{T}(U)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$;

(2) {∅,{红},{绿},{黄},{红,绿},{红,黄},{绿,黄},{红,绿,黄}}.

3. (1) $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in(2,5),\\ 0, & x\notin(2,5);\end{cases}$

(2) $A=\{2,3,5,7\}$, $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A;\end{cases}$

(3) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, $\chi_A(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. $\chi_{A\cup B}(6)=1, \chi_{A\cap B}(6)=0, \chi_{A^C}(6)=1$.

5. (1) $A'=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}=E$, $B'=\{1,3,5,7,9\}$;

(2) $G=\{(1,1),(2,1),(3,3),(4,3),(5,5),(6,5),(7,7),(8,7),(9,9),(10,9)\}$.

6. (1) $A'=\{1,2,3,6\}$;

(2) $G=\{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}$;

(3) f^{-1}: $1\to 6, 2\to 3, 3\to 2, 6\to 1$. 可知 $f=f^{-1}$.

7. $R=\{(a,b)\mid a|b(a\text{ 整除 }b)\}=\{(2,12),(3,3),(3,9),(3,12),(4,12),(13,13)\}$.

8.

二元关系	自反性	对称性	传递性
$xRy: x\mid y$	✓	×	✓
$xRy: x,y$ 同为正或负	✓	✓	✓
$xRy: \lvert x-y\rvert=1$	×	✓	×

9. 提示: $P_1=\{1,2,3,\cdots,9\}, P_2=\{10,11,12,\cdots,99\}, P_3=\{100,101,102,\cdots,999\},\cdots$.

14. $\underset{\sim}{C}=[\text{不大}]=\underset{\sim}{A}^C=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0}{8}+\frac{0}{9}+\frac{0}{10}$,

$\underset{\sim}{D}=[\text{不小}]=\underset{\sim}{B}^C=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$,

$$\underset{\sim}{E}=[\text{或大或小}]=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10},$$

$\underset{\sim}{F}=[\text{不大也不小}]=\underset{\sim}{A}^C\cap\underset{\sim}{B}^C=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.2}{7}+\frac{0}{8}+\frac{0}{9}+\frac{0}{10}$.

15. $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^C)(x)=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ $(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^C)(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$

16. 二曲线交点 $x^*=\frac{3}{2}$, $\underset{\sim}{A}^C=\int_R\frac{1-e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}{x}$,

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \int_{(-\infty,\frac{3}{2}]} \frac{e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}{x} + \int_{(\frac{3}{2},+\infty)} \frac{e^{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}{x},$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \int_{(-\infty,\frac{3}{2}]} \frac{e^{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}{x} + \int_{(\frac{3}{2},+\infty)} \frac{e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}{x}.$$

17. $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$（"商誉高且价格合理"）=(0.7,0.4,0.4,0.7,0.4,0.5,0.4,0.3)，
$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$（"商誉高或价格合理"）=(0.8,0.6,0.6,0.8,0.6,0.5,0.6,0.7).

18. (1) $\underset{\sim}{D}$(不滞销商品) $=\underset{\sim}{A}^C=\frac{0}{u_1}+\frac{0.9}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}+\frac{0.6}{u_6}$；

(2) $\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{D}$；

(3) $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C}$（"又滞销又畅销的商品模糊集"）$=\frac{0}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.4}{u_5}+\frac{0.4}{u_6}$；

(4) $A_{0.5}=\{u_1,u_4,u_5\}$，　$B_{0.5}=\{u_3\}$，　$C_{0.5}=\{u_2,u_3,u_6\}$，
$A_{0.7}=\{u_1\}$，　$B_{0.7}=\varnothing$，　$C_{0.7}=\{u_2,u_3\}$.

19. $A_{0.1}=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A_{0.6}=\{a,c,d,e\}$，$A_{0.9}=\{a,d\}$.

20. $A_{\frac{1}{e}}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$A_1=\{0\}$，$A_0=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

21. $A_{0.75}=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\}$.

26. $\underset{\sim}{A}=0.1A_{0.1}\cup 0.3A_{0.3}\cup 0.5A_{0.5}\cup 0.9A_{0.9}\cup 1A_1$.

27. $\underset{\sim}{A}=\frac{0.1}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.9}{u_3}+\frac{0.2}{u_4}+\frac{0.1}{u_5}+\frac{1}{u_6}+\frac{0.9}{u_7}+\frac{0.2}{u_8}$.

28. $f(\underset{\sim}{A})=\frac{0.8}{y_1}+\frac{0.9}{y_2}+\frac{0}{y_3}$，

$f^{-1}(\underset{\sim}{B})=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.9}{x_6}$，

$f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.9}{x_6}$，

$f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))=\frac{0.6}{y_1}+\frac{0.9}{y_2}+\frac{0}{y_3}$.

31. $\underset{\sim}{A}(1.65)=0.125$，　$\underset{\sim}{A}(1.70)=0.5$，　$\underset{\sim}{A}(1.75)=0.875$.

习题 2

1. $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.4\\0.7 & 0.3\\0.6 & 0.6\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^C=\begin{pmatrix}0.4 & 0.3\\0.7 & 0.7\\0.7 & 0.9\end{pmatrix}$.

2. $(\boldsymbol{R}_1\cup\boldsymbol{R}_2)\circ(\boldsymbol{R}_3\circ\boldsymbol{R}_5)=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.8\\0.5 & 0.4 & 0.8\end{pmatrix}$，

$(\boldsymbol{R}_1^C\circ(\boldsymbol{R}_3\cap\boldsymbol{R}_4))\circ\boldsymbol{R}_6=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.6\\0.3 & 0.6 & 0.6\\0.3 & 0.6 & 0.6\end{pmatrix}$.

9. $t(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8\\0.5 & 0.5\end{pmatrix}$.

13. $R_1 \circ R_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$.

18. $t(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$.

20. $t(R) = R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.9 & 1.0 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 1.0 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 1.0 & 0.7 & 1.0 & 1 & 0.9 & 1.0 \\ 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1.0 & 0.7 & 1.0 & 1.0 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 0.9 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.9 & 0.7 \\ 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.52 & 0.79 & 0.52 & 0.52 & 0.52 & 0.79 \\ 0.52 & 1 & 0.52 & 0.81 & 0.66 & 0.65 & 0.52 \\ 0.79 & 0.52 & 1 & 0.52 & 0.52 & 0.52 & 0.79 \\ 0.52 & 0.81 & 0.52 & 1 & 0.66 & 0.65 & 0.52 \\ 0.52 & 0.66 & 0.52 & 0.66 & 1 & 0.65 & 0.52 \\ 0.52 & 0.65 & 0.52 & 0.65 & 0.65 & 1 & 0.52 \\ 0.79 & 0.52 & 0.79 & 0.52 & 0.52 & 0.52 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.41 & 0.41 & 0.59 \\ 0.41 & 1 & 0.55 & 0.41 \\ 0.41 & 0.55 & 1 & 0.41 \\ 0.59 & 0.41 & 0.41 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $t(R) = R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.87 & 0.87 & 0.87 \\ 0.87 & 1 & 0.92 & 0.88 \\ 0.87 & 0.92 & 1 & 0.88 \\ 0.87 & 0.88 & 0.88 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.91 & 0.95 & 0.94 & 0.93 \\ 0.91 & 1 & 0.96 & 0.86 & 0.85 \\ 0.95 & 0.96 & 1 & 0.90 & 0.89 \\ 0.94 & 0.86 & 0.90 & 1 & 0.99 \\ 0.93 & 0.85 & 0.89 & 0.99 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^8=\begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.65 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.66 & 0.66 \\ 0.67 & 1 & 0.65 & 0.84 & 0.70 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ 0.65 & 0.65 & 1 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 \\ 0.67 & 0.84 & 0.65 & 1 & 0.70 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ 0.67 & 0.70 & 0.65 & 0.70 & 1 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ 0.67 & 0.68 & 0.65 & 0.68 & 0.68 & 1 & 0.66 & 0.66 \\ 0.66 & 0.66 & 0.65 & 0.66 & 0.66 & 0.66 & 1 & 0.80 \\ 0.66 & 0.66 & 0.65 & 0.66 & 0.66 & 0.66 & 0.80 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^4=\begin{pmatrix} 1 & 0.352 & 0.041 & 0.041 & 1.000 & 0.041 \\ 0.352 & 1 & 0.041 & 0.041 & 0.352 & 0.041 \\ 0.041 & 0.041 & 1 & 0.059 & 0.041 & 0.059 \\ 0.041 & 0.041 & 0.059 & 1 & 0.041 & 0.070 \\ 1.000 & 0.352 & 0.041 & 0.041 & 1 & 0.041 \\ 0.041 & 0.041 & 0.059 & 0.070 & 0.041 & 1 \end{pmatrix}$.

习题3

2. $x=20$ ℃时，气温属“不冷”状态.

3. $x_1=6$，属 A_1＝“通货稳定”；　$x_2=21.7$，属 A_3＝“中度通货膨胀”.

4. 37.1 ℃体温属“正常体温”类型.

6. $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}_5$ 最贴近.

7. $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}_3$ 最贴近.

8. $\underset{\sim}{E}$ 与 $\underset{\sim}{A}_2$ 最贴近.

9. 用贴近度判别，此人属于民族 G_1.

10. $s_{甲}=0.9965$，$s_{乙}=0.5$.

11. 预评分 $s=77.4$ 分.

习题4

1. 排法：d,f,e,c,a,b.

2. (1) F-优先关系定序法：x_3,x_2,x_1；

   (2) 相对比较法：x_3,x_2,x_1. 图像(z)是 c.

3. $\underset{\sim}{T}_R(A)=(1,0,1,1)=\{y_1,y_3,y_4\}$，

   $\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})=(0.7,0.2,0.7,0)=\dfrac{0.7}{y_1}+\dfrac{0.2}{y_2}+\dfrac{0.7}{y_3}$.

4. $\underset{\sim}{T}_R(A)=(0.3,1,0.7)=\dfrac{0.3}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}+\dfrac{0.7}{y_3}$，

$\underset{\sim}{T}_R(\underset{\sim}{B})=(0.3,0.6,0.1)=\frac{0.3}{y_1}+\frac{0.6}{y_2}+\frac{0.1}{y_3}$.

5. $\underset{\sim}{B}=f(\underset{\sim}{A})=\frac{1}{a}+\frac{0.4}{b}+\frac{0.7}{c}$,

$f^{-1}(\underset{\sim}{B})=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.4}{x_4}+\frac{0.4}{x_5}+\frac{0.7}{x_6}$.

6. $f(\underset{\sim}{A})(y)=\begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2(y-1)}, & 1\leqslant y\leqslant\frac{3}{2},\\ 2-\sqrt{2(y-1)}, & \frac{3}{2}<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

7. 用 $M(\wedge,\vee)$ 计算，$A_1\circ R=(0.3,0.5,0.2,0.2)$，$A_2\circ R=(0.2,0.3,0.4,0.3)$.

8. 满意的权重为 $\underset{\sim}{A}_4$.

9. 南宁地区不适宜种橡胶，万宁地区很适宜种橡胶.

10. 学生对教师的综合评判为 $\underset{\sim}{B}=(0.33,0.42,0.17,0.08)$.

11. (1) 解集 $X=(0.6,[0,0.6],[0,1],[0,1])\cup([0,0.6],0.6,[0,1],[0,1])\cup([0,0.6],[0,0.6],[0.6,1],[0,1])$;

(2) 解集 $X=([0.6,1],[0,0.6],[0,1],[0,0.6],[0,1])\cup([0,1],0.6,[0,1],[0,0.6],[0,1])\cup([0,1],[0,0.6],[0,1],0.6,[0,1])$;

(3) 解集 $X=([0.7,1],[0,0.4],[0,0.4],0.5)$;

(4) 解集 $X=([0,0.6],0.6)\cup(0.6,[0.5,0.6])$;

(5) 解集 $X=(0.5,0.8,[0.7,1],[0,0.4],[0,0.4])\cup(0.5,0.8,[0.7,1],0.4,[0,0.4])\cup(0.5,0.8,[0.7,1],[0,0.4],0.4)$.

习题 5

1. (1) 模糊最优解 $x=(0,411.41,0)^{\mathrm{T}}$，模糊最优值为 1645.65;

(2) 模糊最优解 $x=(6.44,0,0.67)^{\mathrm{T}}$，模糊最优值为 7.78.

2. 选购原料 B_2、B_3、B_5 分别为 6700 kg、200 kg、2400 kg 较好.

3. 种植玉米 74.5 hm^2，养奶牛 17 头，养鸡 2722 只，秋冬季派约 154 人·日外出干活.

附录 B　本书中部分算法 MATLAB 程序

1. F_tj.m

```
function[Ax]=F_tj(A,m0)%定义函数
%模糊统计,m0 划分区间个数
[n,m]=size(A);%获得矩阵的行列数
Amin=A(1,1); %A 的最小值
Amax=A(1,2); %A 的最大值
for(i=1:n)
    if(A(i,1)>A(i,2))x=A(i,2);A(i,2)=A(i,1);A(i,1)=x;end %A 的最小值
    if(A(i,1)<Amin)Amin=A(i,1);end %A 的最小值
    if(A(i,2)>Amax)Amax=A(i,2);end %A 的最大值
end
x=Amin:(Amax-Amin)/m0:Amax;
Ax=[ ];
for(k=1:m0+1)Ax(k)=0;
    for(i=1:n)if(x(k)>=A(i,1)&x(k)<=A(i,2))Ax(k)=Ax(k)+1;end;end
    Ax(k)=Ax(k)/n;
end
Bar(Ax);%模糊统计直方图,或用 plot(x,Ax)画出折线图
```

2. Max_Min.m

```
function[C]=Max_Min(A,B)
%模糊矩阵的合成运算,先取大,后取小
[m,s]=size(A);[s1,n]=size(B);C=[ ];
if(s1~=s)return;end
for(i=1:m)for(j=1:n)C(i,j)=0;
    for(k=1:s)x=0;
        if(A(i,k)<B(k,j))x=A(i,k);
        else x=B(k,j);end
        if(C(i,j)<x)C(i,j)=x;end
    end
end;end
```

3. F_JISjBzh.m

```
function[X]=F_JISjBzh(cs,X)
%模糊聚类分析数据标准化变换
%X 原始数据矩阵; cs=0,不变换; cs=1,标准差变换; cs=2,极差变换
if(cs==0)return;end
[n,m]=size(X);%获得矩阵的行列数
if(cs==1)%平移・标准差变换
    for(k=1:m)xk=0;
        for(i=1:n)xk=xk+X(i,k);end
        xk=xk/n;sk=0;
        for(i=1:n)sk=sk+(X(i,k)-xk)^2;end
        sk=sqrt(sk/n);
        for(i=1:n)X(i,k)=(X(i,k)-xk)/sk;end
    end
else%平移・极差变换
    for(k=1:m)xmin=X(1,k);xmax=X(1,k);
        for(i=1:n)
            if(xmin>X(i,k))xmin=X(i,k);end
            if(xmax<X(i,k))xmax=X(i,k);end
        end
        for(i=1:n)X(i,k)=(X(i,k)-xmin)/(xmax-xmin);end
    end
end
```

4. F_JIR.m

```
function[R]=F_JIR(cs,X)
%模糊聚类分析建立模糊相似矩阵
%X,数据矩阵
%cs=1,数量积法
%cs=2,夹角余弦法
%cs=3,相关系数法
%cs=4,指数相似系数法
%cs=5,最大最小法
%cs=6,算术平均最小法
%cs=7,几何平均最小法
```

```
%cs=8,直接欧几里得距离法
%cs=9,直接海明距离法(绝对值减数法)
%cs=10,直接切比雪夫距离法
%cs=11,倒数欧几里得距离法
%cs=12,倒数海明距离法(绝对值倒数法)
%cs=13,倒数切比雪夫距离法
%cs=14,指数欧几里得距离法
%cs=15,指数海明距离法(绝对值指数法)
%cs=16,指数切比雪夫距离法
[n,m]=size(X);%获得矩阵的行列数
R=[ ];
if(cs==1)maxM=0;pd=0;%数量积法
    for(i=1:n)for(j=1:n)if(j~=i)x=0;
        for(k=1:m)x=x+X(i,k)*X(j,k);end
        if(maxM<x)maxM=x;end
    end;end;end
    if(maxM<0.000001)return;end
    maxM=maxM+1;
    for(i=1:n)for(j=1:n)
        if(i==j)R(i,j)=1;
        else R(i,j)=0;
            for(k=1:m)R(i,j)=R(i,j)+X(i,k)*X(j,k);end
            R(i,j)=R(i,j)/maxM;
            if(R(i,j)<0)pd=1;end
        end
    end;end
    if(pd)for(i=1:n)for(j=1:n)R(i,j)=(R(i,j)+1)/2;end;end;end
elseif(cs==2)%夹角余弦法
    for(i=1:n)for(j=1:n)xi=0;xj=0;
        for(k=1:m)xi=xi+X(i,k)^2;xj=xj+X(j,k)^2;end
        s=sqrt(xi*xj);R(i,j)=0;
        for(k=1:m)R(i,j)=R(i,j)+X(i,k)*X(j,k);end
        R(i,j)=R(i,j)/s;
    end;end
elseif(cs==3)%相关系数法
```

```
    for(i=1:n)for(j=1:n)xi=0;xj=0;
        for(k=1:m)xi=xi+X(i,k);xj=xj+X(j,k);end
        xi=xi/m;xj=xj/m;xis=0;xjs=0;
        for(k=1:m)xis=xis+(X(i,k)-xi)^2;xjs=xjs+(X(j,k)-xj)^2;end
        s=sqrt(xis*xjs);R(i,j)=0;
        for(k=1:m)R(i,j)=R(i,j)+abs((X(i,k)-xi)*(X(j,k)-xj));end
        R(i,j)=R(i,j)/s;
    end;end
elseif(cs==4)%指数相似系数法
    for(i=1:n)for(j=1:n)R(i,j)=0;
        for(k=1:m)xk=0;
            for(z=1:n)xk=xk+X(z,k);end
            xk=xk/n;sk=0;
            for(z=1:n)sk=sk+(X(z,k)-xk)^2;end
            sk=sk/n;R(i,j)=R(i,j)+exp(-0.75*((X(i,k)-X(j,k))/sk)^2);
        end
        R(i,j)=R(i,j)/m;
    end;end
elseif(cs<=7)%最大最小法 算术平均最小法 几何平均最小法
    for(i=1:n)for(j=1:n)fz=0;fm=0;
        for(k=1:m)
            if(X(j,k)<0)R=[ ];return;end
            if(X(j,k)<X(i,k))x=X(i,k);
            else x=X(j,k);end
            fz=fz+x;
        end
        if(cs==5)%最大最小法
            for(k=1:m)if(X(i,k)>X(j,k))x=X(i,k);else x=X(j,k);end;end
            fm=fm+x;
        elseif(js==6)for(k=1:m)fm=fm+(X(i,k)+X(j,k))/2;end%算术平均最小法
        else for(k=1:m)fm=fm+sqrt(X(i,k)*X(j,k));end;end%几何平均最小法
        R(i,j)=fz/fm;
    end;end
elseif(cs<=10)C=0;%直接距离法
    for(i=1:n)for(j=i+1:n)d=0;
```

```
        if(cs==8)for(k=1:m)d=d+(X(i,k)-X(j,k))^2;end
            d=sqrt(d);%欧几里得距离
        elseif(cs==9)for(k=1:m)d=d+abs(X(i,k)-X(j,k));end%海明距离
        else for(k=1:m)if(d<abs(X(i,k)-X(j,k)))d=abs(X(i,k)-X(j,k));end;end;end%切比雪夫距
          离
        if(C<d)C=d;end
    end;end
    C=1/(1+C);
    for(i=1:n)for(j=1:n)d=0;
        if(cs==8)for(k=1:m)d=d+(X(i,k)-X(j,k))^2;end
            d=sqrt(d);%欧几里得距离
        elseif(cs==9)for(k=1:m)d=d+abs(X(i,k)-X(j,k));end%海明距离
        else for(k=1:m)if(d<abs(X(i,k)-X(j,k)))d=abs(X(i,k)-X(j,k));end;end;end%切比雪夫距
          离
        R(i,j)=1-C*d;
    end;end
elseif(cs<=13)minM=Inf;%倒数距离法
    for(i=1:n)for(j=i+1:n)d=0;
        if(cs==11)for(k=1:m)d=d+(X(i,k)-X(j,k))^2;end
            d=sqrt(d);%欧几里得距离
        elseif(cs==12)for(k=1:m)d=d+abs(X(i,k)-X(j,k));end%海明距离
        else for(k=1:m)if(d<abs(X(i,k)-X(j,k)))d=abs(X(i,k)-X(j,k));end;end;end%切比雪夫距
          离
        if(minM>d)minM=d;end
    end;end
    minM=0.9999*minM;
    if(minM<0.000001)return;end
    for(i=1:n)for(j=1:n)d=0;
        if(j==i)R(i,j)=1;continue;end
        if(cs==11)for(k=1:m)d=d+(X(i,k)-X(j,k))^2;end
            d=sqrt(d);%欧几里得距离
        elseif(cs==12)for(k=1:m)d=d+abs(X(i,k)-X(j,k));end%海明距离
        else for(k=1:m)if(d<abs(X(i,k)-X(j,k)))d=abs(X(i,k)-X(j,k));end;end;end%切比雪夫距
          离
        R(i,j)=minM/d;
```

```
    end;end
else for(i=1:n)for(j=1:n)d=0;%指数距离法
    if(cs==14)for(k=1:m)d=d+(X(i,k)-X(j,k))^2;end
        d=sqrt(d);%欧几里得距离
    elseif(cs==15)for(k=1:m)d=d+abs(X(i,k)-X(j,k));end%海明距离
    else for(k=1:m)if(d<abs(X(i,k)-X(j,k)))d=abs(X(i,k)-X(j,k));end;end;end%切比雪夫距离
    R(i,j)=exp(-d);
end;end;end
```

5. F_JIDtjl.m

```
function F_JIDtjl(R)%定义函数
%模糊聚类分析动态聚类
%R 模糊相似矩阵
[m,n]=size(R);%获得矩阵的行列数
if(m~=n|m==0)return;end
for(i=1:n)R(i,i)=1;%修正错误
    for(j=i+1:n)
        if(R(i,j)<0)R(i,j)=0;elseif(R(i,j)>1)R(i,j)=1;end
        R(i,j)=round(10000*R(i,j))/10000;%保留 4 位小数
        R(j,i)=R(i,j);
    end
end
js0=0;
while(1)%求传递闭包
    R1=Max_Min(R,R);js0=js0+1;
    if(R1==R)break;else R=R1;end
end
lmd(1)=1;k=1;
for(i=1:n)for(j=i+1:n)pd=1;%找出所有不相同的元素
    for(x=1:k)if(R(i,j)==lmd(x))pd=0;break;end;end
    if(pd)k=k+1;lmd(k)=R(i,j);end
end;end
for(i=1:k-1)for(j=i+1:k)if(lmd(i)<lmd(j))%从大到小排序
    x=lmd(j);lmd(j)=lmd(i);lmd(i)=x;
end;end;end
```

```
for(x=1:k)%按 lmd(x)分类,分类数为 flsz(x),临时用 Sz 记录元素序号
    js=0;flsz(x)=0;
    for(i=1:n)pd=1;
        for(y=1:js)if(Sz(y)==i)pd=0;break;end;end
        if(pd)
            for(j=1:n)if(R(i,j)>=lmd(x))js=js+1;Sz(js)=j;end;end
            flsz(x)=flsz(x)+1;
        end
    end
end
for(i=1:k-1)for(j=i+1:k)if(flsz(j)==flsz(i))flsz(j)=0;end;end;end
fl=0;%排除相同的分类
for(i=1:k)if(flsz(i))fl=fl+1;lmd(fl)=lmd(i);end;end
for(i=1:n)xhsz(i)=i;end
for(x=1:fl)%获得分类情况：对分类元素进行排序
    js=0;flsz(x)=0;
    for(i=1:n)pd=1;
        for(y=1:js)if(Sz(y)==i)pd=0;break;end;end
        if(pd)if(js==0)y=0;end
            for(j=1:n)if(R(i,j)>=lmd(x))js=js+1;Sz(js)=j;end;end
            flsz(x)=flsz(x)+1;
            Sz0(flsz(x))=js-y;
        end
    end
    js0=0;
    for(i=1:flsz(x))
        for(j=1:Sz0(i))Sz1(j)=Sz(js0+j);end
        for(j=1:n)for(y=1:Sz0(i))if(xhsz(j)==Sz1(y))js0=js0+1;Sz(js0)=xhsz(j);end;end;end
    end
    for(i=1:n)xhsz(i)=Sz(i);end
end
for(x=1:fl)%获得分类情况：每一子类的元素个数
    js=0;flsz(x)=0;
    for(i=1:n)pd=1;
        for(y=1:js)if(Sz(y)==i)pd=0;break;end;end
```

```
            if(pd)if(js==0)y=0;end
                for(j=1:n)if(R(i,j)>=lmd(x))js=js+1;Sz(js)=j;end;end
                flsz(x)=flsz(x)+1;Sz0(flsz(x))=js-y;
            end
        end
        js0=1;
        for(i=1:flsz(x))y=1;
            for(j=1:flsz(x))
                if(Sz(y)==xhsz(js0))flqksz(x,i)=Sz0(j);js0=js0+Sz0(j);break;end
                y=y+Sz0(j);
            end
        end
    end
    F_dtjltx=figure('name','动态聚类图','color','w');
    axis('off');
    Kd=30;Gd=40;y=fl*Gd+Gd;lx=80;
    text(24,y+Gd/2,'λ');
    for(i=1:n)
        text(lx-5+i*Kd-0.4*Kd*(xhsz(i)>9),y+Gd/2,int2str(xhsz(i)));
        line([lx+i*Kd,lx+i*Kd],[y,y-Gd]);
        linesz(i)=lx+i*Kd;
    end
    text(lx*1.5+i*Kd,y+Gd/2,'分类数');
    y=y-Gd;
    for(x=1:fl)
        text(8,y-Gd/2,num2str(lmd(x)));
        js0=1;js1=0;
        if(x==1)
            for(i=1:flsz(x))
                js1=flqksz(x,i)-1;
                if(js1)line([linesz(js0),linesz(js0+js1)],[y,y]);end
                line([(linesz(js0+js1)+linesz(js0))/2,(linesz(js0+js1)+linesz(js0))/2],[y,y-Gd]);
                linesz(i)=(linesz(js0+js1)+linesz(js0))/2;
                js0=js0+js1+1;
            end
```

```
    else for(i=1:flsz(x))
        js1=js1+flqksz(x,i);
        js2=0;pd=0;
        for(j=1:flsz(x-1))
            js2=js2+flqksz(x-1,j);
            if(js2==js1)pd=1;break;end
        end
        if(j~=js0)line([linesz(js0),linesz(j)],[y,y]);end
        line([(linesz(js0)+linesz(j))/2,(linesz(js0)+linesz(j))/2],[y,y-Gd]);
        linesz(i)=(linesz(js0)+linesz(j))/2;
        js0=j+1;
    end;end
    text(2*lx+n*Kd,y-Gd/3,int2str(flsz(x)));
    y=y-Gd;
end
```

6. F_Jlfx.m

```
function F_Jlfx(bzh,fa,X)
%模糊聚类分析
%bzh 数据标准化类型; fa 建立模糊相似矩阵的方法; X 原始数据矩阵
X=F_JlSjBzh(bzh,X);
R=F_JlR(fa,X);
[m,n]=size(R);
if(m~=n|m==0)return;end
F_JlDtjl(R);
```

7. TwoLp.m

```
function[z,x,p]=TwoLp(A,b,c,T)
%两阶段法求解线性规划
%入口参数 A,b,c 分别表示技术系数矩阵,资源限量向量,价值系数向量,入口参数 T 是一个向量
%向量 b 的维数必须等于矩阵 A 的行数 m,向量 c 的维数必须等于矩阵 A 的列数 n
%向量 T 的 1 至 m 个分量分别表示 m 个约束条件,0 表示=,1 表示≤,2 表示≥
%向量 T 的第 m+1 个分量,0 表示 min,1 表示 max
%出口参数第一个记录最优值 z,第二个记录最优解 x
%参考例子: [z,x]=TwoLp([2,3;0,4],[26,13],[1,3],[2,2,0]);
```

```
[m0,n0]=size(A);%获得矩阵的行列数
z=0;x=[ ];ysn=n0;p=0;
if(m0==0)return;end
[m,n]=size(c);
if(n==1)c=c';n=m;m=1;end
if(n~=n0|m~=1)fprintf('\n 错误：向量 c(第 3 个入口参数)的维数不等于矩阵 A(第 1 个入口参数)
的列数\n\n');p=3;return;end
[m,n]=size(b);
if(m==1)b=b';m=n;n=1;end
if(m~=m0|n~=1)fprintf('\n 错误：向量 b(第 2 个入口参数)的维数不等于矩阵 A(第 1 个入口参数)
的行数\n\n');p=3;return;end
[m,n]=size(T);
if(m==1)m=n;n=1;end
if(m<=m0|n~=1)fprintf('\n 错误：向量 T(第 4 个入口参数)的维数<m+1\n\n');p=3;return;end
T=round(T);
if(m>m0)
    for(i=1:m0)if(T(i)<0|T(i)>2)fprintf('\n 错误：向量 T(第 4 个入口参数)的第%d 个分量不是 0,1
或 2\n\n',i);p=3;return;end;end
    if(T(m0+1)<0|T(m0+1)>1)fprintf('\n 错误：向量 T(第 4 个入口参数)的第%d 个分量不是 0
或 1\n\n',m0+1);p=3;return;end
end
m=m0;n=n0;wcx=0.000000001;
Control=T(m+1);
if(Control)c=-c;end
ysc=c;Vb=[ ];%Vb 记录基变量的序号
for(i=1:m)%将右端常数变为非负
    if(abs(b(i))<wcx)b(i)=0;
        if(T(i)==2)A(i,:)=-A(i,:);T(i)=1;end
    elseif(b(i)<0)%不等式反向
        A(i,:)=-A(i,:);b(i)=-b(i);
        if(T(i)==2)T(i)=1;
        elseif(T(i)==1)T(i)=2;end
    end
    if(T(i))n=n+1;%化为标准型 A(:,n)=0;
        if(T(i)==1)A(i,n)=1;Vb(i)=n;
```

```
            else A(i,n)=-1;end
        end
end
if(n>ysn)c(n)=0;end
c0=c;c=zeros(1,n);
n1=n;%非人工变量数
for(i=1:m0)if(T(i)~=1)n=n+1;A(i,n)=1;Vb(i)=n;c(n)=1;end;end%增加人工变量 A(:,n)=0;
[i,j]=size(b);
if(i==1)b=b';end
if(n==n1)c=c0;end
B=eye(m);ddbs=0;%记录迭代步数
fprintf('两阶段法求解线性规划：\n');
cB=[ ];for(j=1:m)cB(j)=c(Vb(j));end
while(1)ddbs=ddbs+1;%换基迭代
        bb=B*b;z=cB*bb;%计算检验数行
        s=0;cBB=cB*B;
        for(j=1:n1)%搜索正检验数
            cj=cBB*A(:,j)-c(j);
            if(abs(round(cj)-cj)<0.000001)cj=round(cj);end
            if(cj>wcx)s=j;break;end
        end
        if(s)r=0;p=B*A(:,s);minfds=Inf;%假如有正检验数
            for(i=1:m)if(p(i)>wcx&bb(i)/p(i)<minfds)minfds=bb(i)/p(i);r=i;end;end%搜索是否有轴
心项
            if(r)%假如有轴心项,换基
                cB(r)=c(s);Vb(r)=s;B0=eye(m);
                for(i=1:m)B0(i,r)=-p(i)/p(r);end
                B0(r,r)=1/p(r);B=B0*B;%换基
            else p=2;fprintf('迭代步数%d,该线性规划问题没有最优解',ddbs);break;end%没有轴
心项,中止计算
        else%假如没有正检验数
            if(n==n1)p=0;z=(1-2*Control)*z;fprintf('迭代步数%d,该线性规划问题的最优值为%g,
最优解如下\n',ddbs,z);
                x=zeros(1,ysn);
                for(i=1:m)if(Vb(i)<=ysn)if(abs(bb(i)-round(bb(i)))<0.00001)
```

```
bb(i)=round(bb(i));end;x(Vb(i))=bb(i);end;end
            for(j=1:ysn)if(x(j))fprintf('      x%-4d= %g\n',j,x(j));end;end
            break%中止计算
        elseif(z>0.0001)p=1;fprintf('迭代步数%d,该线性规划问题没有可行解',ddbs);break%
中止计算
        else r=0;
            for(i=1:m)if(Vb(i)>n1)r=i;break;end;end%搜索基变量中是否有人工变量
            if(r)Ar=B(r,:)*A;s=0;
                for(j=1:n1)if(abs(Ar(j))>wcx)s=j;break;end;end
                if(s)cB(r)=c(s);Vb(r)=s;B0=eye(m);p=B*A(:,s);
                    for(i=1:m)B0(i,r)=-p(i)/p(r);end
                    B0(r,r)=1/p(r);B=B0*B;%换基
                else AA=[ ];B0=[ ];bb=[ ];

    for(i=1:m)if(i~=r)s=s+1;AA(s,:)=A(i,:);B0(s,:)=B(i,:);bb(s)=b(i);end;end
                    clear A B T b;b=bb';
                    for(j=1:m)if(Vb(j)>Vb(r));Vb(j)=Vb(j)-1;end;end
                    s=0;for(j=1:m)if(j~=r)s=s+1;Vb0(s)=Vb(j);B(:,s)=B0(:,j);end;end
                    s=0;for(j=1:n)if(j~=Vb(r))s=s+1;A(:,s)=AA(:,j);cc(s)=c(j);end;end
                    c=cc;Vb=Vb0;clear AA B0 bb cc Vb0;
                    m=m-1;n=n-1;cB=[ ];for(j=1:m)cB(j)=c(Vb(j));end
                end
                clear Ar;
            else AA=[ ];
                for(j=1:n1)AA(:,j)=A(:,j);end
                c=c0;A=AA;clear c0 AA;n=n1;p=1;
                cB=[ ];for(j=1:m)cB(j)=c(Vb(j));end
            end
        end
    end
end
```

8. FuzzyLp.m

```
function[z,x]=FuzzyLp(A,b,c,T)
%模糊线性规划
```

```
%入口参数A,b,c分别表示技术系数矩阵,资源限量伸缩指标矩阵,价值系数向量,入口参数T是一个向量
%矩阵b的行数必须等于矩阵A的行数m,矩阵b的第一列表示资源限量,第二列表示伸缩指标
%向量c的维数必须等于矩阵A的列数n
%向量T的1至m个分量分别表示m个约束条件,0表示=,1表示≤,2表示≥
%向量T的第m+1个分量,0表示min,1表示max
%出口参数第一个记录模糊最优值z,第二个记录模糊最优解x
%参考例子:[z,x]=FuzzyLp([1,1,1;1,-6,1;1,-3,-1],[8,2;6,1;-4,0.5],[1,-4,6],[1,2,0,1]);
[m0,n0]=size(A);%获得矩阵的行列数
Control=T(m0+1);
[z0,x,p]=TwoLp(A,b(:,1),c,T);
if(p)return;end
m=m0;
for(i=1:m0)
    if(T(i)==1)b1(i)=b(i,1)+b(i,2);
    elseif(T(i)==2)b1(i)=b(i,1)-b(i,2);
    else b1(i)=b(i,1)+b(i,2);T(i)=1;
        m=m+1;A(m,:)=A(i,:);b(m,:)=b(i,:);T(m)=2;b1(m)=b(m,1)-b(m,2);
    end
end
T(m+1)=Control;
[z,x]=TwoLp(A,b1,c,T);
m=m+1;A(m,:)=c;T(m)=T(m)+1;b(m,1)=z0;b1(m)=z0;b(m,2)=abs(z0-z);T(m+1)=1;
n=n0+1;cc=zeros(1,n);cc(n)=1;
for(i=1:m)A(i,n)=(3-2*T(i))*b(i,2);end
[z,x]=TwoLp(A,b1,cc,T);
z=0;for(j=1:n0)z=z+c(j)*x(j);end
fprintf('\n 原模糊线性规划问题的模糊最优值为%g,模糊最优解如下\n',z);
for(j=1:n0)if(x(j))fprintf('    x%-4d= %g\n',j,x(j));end;end
fprintf('\n');
```

9. MoLp.m

```
function[z,x]=MoLp(A,b,c,T)
%多目标线性规划
%入口参数A,b,c分别表示技术系数矩阵,资源限量向量,价值系数矩阵,入口参数T是一个向量
```

```
%向量b的维数必须等于矩阵A的行数m,矩阵c的列数必须等于矩阵A的列数n
%向量T的1至m个分量分别表示m个约束条件,0表示=,1表示≤,2表示≥
%向量T的第m+1个分量分别表示目标函数的最优情况,0表示min,1表示max
%出口参数第一个记录模糊最优值z,第二个记录模糊最优解x
%参考例子:[z,x]=MoLp([1,3,2;1,4,-1],[10,6]',[1,2,-1;2,3,1],[1,2,0,1]);
[m0,n0]=size(A);%获得矩阵的行列数
[mc,n]=size(c);
if(m0==0|n~=n0)return;end
for(i=1:mc)
      cc=c(i,:);Opt(i)=T(m0+i);T(m0+1)=Opt(i);
      [z,x,p]=TwoLp(A,b,cc,T);
      if(p)return;end
      for(j=1:mc)z0(i,j)=c(j,:)*x';end
end
for(j=1:mc)for(i=1:mc-1)if(z0(i,j)~=z0(mc,j))p=1;break;end;end;end
if(p==0)return;end
m=m0;n=n0+1;
for(i=1:mc)m0=m0+1;A(m0,:)=c(i,:);end
for(i=1:mc)m=m+1;b(m)=z0(i,i);T(m)=Opt(i)+1;
      for(j=1:mc)if((b(m)-z0(j,i))*(1-2*Opt(i))<0)b(m)=z0(j,i);end;end
      A(m,n)=b(m)-z0(i,i);
end
T(m+1)=1;cc=zeros(1,n);cc(n)=1;
[z,xx,p]=TwoLp(A,b,cc,T);
z=zeros(1,mc);
for(i=1:mc)for(j=1:n0)z(i)=z(i)+c(i,j)*x(j);end;end
fprintf('\n 原多目标线性规划问题的模糊最优值为');
for(i=1:mc)fprintf('%g, ',z(i));end
fprintf('模糊最优解如下\n');
for(j=1:n0)if(x(j))fprintf('      x%-4d= %g\n',j,x(j));end;end
fprintf('\n');
```

10. FoLp.m

```
function[x]=FoLp(A,b,c,T)
%模糊目标线性规划
```

```
%入口参数A,b,c分别表示技术系数矩阵,资源限量向量,价值系数伸缩指标矩阵,入口参数T是一个向量
%向量b的维数必须等于矩阵A的行数m
%矩阵c的列数必须等于矩阵A的列数n,第1,2,3行分别表示价值系数,左伸缩指标,右伸缩指标
%向量T的1至m个分量分别表示m个约束条件,0表示=,1表示≤,2表示≥
%向量T的第m+1个分量,0表示min,1表示max
%出口参数记录模糊最优解x
%参考例子：[x]=FoLp([6,2],[21],[20,10;3,2;4,1],[1,1]);
[m0,n0]=size(A);%获得矩阵的行列数
cc(1,:)=c(1,:);cc(2,:)=c(1,:)-c(2,:);cc(3,:)=c(1,:)+c(3,:);
T(m0+2)=T(m0+1);T(m0+3)=T(m0+1);
[z,x]=MoLp(A,b,cc,T);
fprintf('\n 原模糊目标线性规划问题的模糊最优解如下\n');
for(j=1:n0)if(x(j))fprintf('      x%-4d= %g\n',j,x(j));end;end
fprintf('\n');
```

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control[J]. 1965(8):338-353.

[2] 楼世博. 模糊集之父——L. A. Zadeh[J]. 模糊数学,1985(3):115-116.

[3] 刘应明,汪平. 模糊性——精确性的另一半[M]. 北京:清华大学出版社;广州:暨南大学出版社,2000.

[4] 朱梧槚,贺仲雄,袁相琬. 对Fuzzy数学及其基础的几点看法[J]. 模糊数学,1984(3):103-108.

[5] 张南纶. 随机现象的从属特性与概率特性[J]. 武汉建材学院学报,1981(1).

[6] 朱永庚. Fuzzy聚类的Boole矩阵法[J]. 数学的实践与认识,1988(3):79-81.

[7] 肖辞源. 工程模糊系统. 北京:科学出版社,2004.

[8] 曾文艺,张颜,宋雯彦. 研究生招生中的模糊聚类分析方法[J]. 北京师范大学学报(自然科学版). 2001,37(4):436-439.

[9] 谢季坚,邝幸泉,李启文. 亚洲玉米螟测报的数学模型[J]. 生物数学学报. 1992,7(3):38-43.

[10] 陈蓓菲,朱鹏立,陈潮. 大学生体质水平的等级划分与模糊识到[J]. 福建农学院学报,1992(2):237-240.

[11] 刘来福. 模糊数学在冬小麦亲本分类中的应用[J]. 北京师范大学学报,1979(3):78-85.

[12] 刘为仁. 模糊综合评判在农业经营决策中的应用[J]. 广西农学院学报,1989,8(2):53-57.

[13] 朱培昌,郑国清. 用模糊数学方法进行企业分类及经济效益评价[J]. 河南农业大学学报,1989,23(2):138-144.

[14] 张德舜. 花卉适宜栽培地的模糊识别[J]. 园艺学报,1990,17(3):233-237.

[15] 姜朋. 图书选题的模糊综合评判[J]. 沈阳:东北财经大学学报,2003(1):89-91.

[16] 郭喜东. 综合评判悬铃木在天津市种植的适应度[J]. 模糊数学,1983(2):99-102.

[17] 谢朝晖. 企业核心竞争力研究:C公司——基于核心竞争力的企业发展战略研究[D]. 武汉:武汉大学商学院,2004.

[18] 杨艳生,史德明. 模糊关系方程在土壤侵蚀预报中的应用尝试[J]. 模糊数学,1984(3):83-86.

[19] 汪培庄. 模糊集合论及其应用[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

[20] 罗承忠. 模糊集引论(上册)[M]. 北京:北京师范大学出版社,1989.

[21] 谢季坚. 农业科学中的模糊数学方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1993.

[22] 刘承平. 数学建模方法[M]. 北京:高等教育出版社,2002.

[23] 方述诚,汪定伟. 模糊数学与模糊优化[M]. 北京:科学出版社,1997.

[24] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2002.

[25] 张曾科. 模糊数学在自动化技术中的应用[M]. 北京:清华大学出版社,1997.

[26] 王翼. 现代控制论[M]. 北京:机械工业出版社,2005.

[27] 何平,王鸿绪. 模糊控制的设计及应用[M]. 北京:科学出版社,1997.

[28] 李洪兴,汪培庄.模糊数学[M].北京:国防工业出版社,1994.

[29] 韩立岩,汪培庄.应用模糊数学[M].北京:首都经济贸易大学出版社,1998.

[30] LOWEN R. Mathematics and fuzziness. Part Ⅰ[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27(1):1-3.

[31] LOWEN R. Mathematics and fuzziness. Part Ⅱ[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 30(1):1-3.

[32] Франс Д ж, Торнли Д ж Х М. Математические модели в сельском хозяйстве[М]. Москва: Агропромиздат, 1987.

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]
书名= 模糊数学方法及其应用
作者=
页数= 2 4 9
S S 号= 0
出版日期=
V s s 号= 7 2 7 7 6 8 2 5